

1. Mutasd meg, hogy $\log_5 20$ irracionális! (Útmutatás: használd a számelmélet alaptételét!)
2. Mi a 2 prím kitevője 17! (17 faktoriális kanonikus alakjában)?
3. Mutasd meg, hogy ha a, b pozitív egészek, akkor léteznek m, n pozitív egészek, melyekre $m|a$, $n|b$, $(m, n) = 1$ és $mn = [a, b]$.
4. Mutasd meg, hogy bármely nemnegatív egész felírható egy négyzetszám és egy négyzetmentes szám szorzataként! (n négyzetmentes, ha $p^2 \nmid n$ minden p prímre, pl 6 és 30 négyzetmentes, de 12 és 18 nem, hiszen $2^2|12$ és $3^2|18$).
5. Legyen H a tanulószobán résztvevő hallgatók halmaza a következő relációkkal ($x, y \in H$).
 - a) $x \sim y$, ha a személyi számaik összege osztható 4-el,
 - b) $x \sim y$, ha ugyanabban a hónapban születtek,
 - c) $x \sim y$, ha az állandó lakcímük (légvonalbeli) távolsága legfeljebb 100 km és
 - d) $x \sim y$, ha x -nek és y -nak is van testvére.Melyek ekvivalenciarelációk a fentiek közül? (\sim ekvivalenciareláció, ha minden $x, y, z \in H$ -ra
1) $x \sim x$, 2) $x \sim y \implies y \sim x$ és 3) $x \sim y, y \sim z \implies x \sim z$)
6. Mennyi 2^{67} modulo 61?
7. Oldd meg az alábbi kongruenciákat (az egészek között)
 - a) $12x \equiv 15 \pmod{21}$,
 - b) $12x \equiv 4 \pmod{6}$,
 - c) $12x \equiv 4 \pmod{2}$ és
 - d) $30x \equiv 4 \pmod{37}$.

-
8. Készítsd el $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ és $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ műveleti táblázatát!
 9. Oldd meg a következő kongruenciarendszert (az egészek között)!

$$\begin{aligned}x &\equiv 2 \pmod{3} \\x &\equiv 3 \pmod{8} \\x &\equiv -4 \pmod{11}\end{aligned}$$

10. Mennyi 3^{32} modulo 13?
11. a) Mennyi $5^{-1} \pmod{26}$?
b) Van-e a 4-nek inverze modulo 26?
12. * Mutasd meg, hogy ha H egy halmaz, akkor $(\mathcal{P}(H), \cap, \Delta)$ integritási tartomány (azaz egységelemes, kommutatív és nullosztómentes gyűrű). Itt $\mathcal{P}(H)$ a H hatványhalmaza: H részhalmazainak halmaza, \cap a metszet (mint művelet) és Δ a szimmetrikus differencia: $A\Delta B = (A \cup B) - (A \cap B)$. Gyűrű-e $(\mathcal{P}(H), \cup, \cap)$?