1. Melyek igazak minden $a, n, m > 1$ természetes számra?
   a) $a^n \equiv 1 \pmod{m} \implies \varphi(m)|n$, b) $\varphi(m)|n \implies a^n \equiv 1 \pmod{m}$,
   c) $a^n \equiv 1 \pmod{m} \implies (a, m) = 1$, d) $(a, m) = 1 \implies a^n \equiv 1 \pmod{m}$.

2. Számold ki a következőket:
   a) $\varphi(23)$, $\varphi(21)$, $\varphi(63)$ és $\varphi(10!)$,
   b) $120^{24} \mod 23$, $115^{21} \mod 21$, $68^{111} \mod 63$ és $111^{68} \mod 63$
   (vigyázz, 63 és 111 **nem** relatív prímek!) és
   c) $3^{3^{3^4}}$ utolsó két számjegyét.

3. Mely n egészekre teljesül, hogy $\varphi(n) = 6$?

4. Mi a következő komplex számok algebrai alakja?
   a) $(3-4i)(7+8i)$, b) $(3-4i)/(2-i)$, c) i^{2024} és d) $(1+i)^9$.

5. Oldd meg a $z^2 + 2iz - 1 + i = 0$ másodfokú egyenletet $\mathbb{C}$-ben!

6. Ábrázold a következő egyenletek megoldásait a komplex számsíkon!
   a) $|z - 5 + i| = 2$, b) $|z - i| = |z + i|$ és c) $|(z - 3 + 4i)/(z - i)| \geq 1$,

7. * a) Mutasd meg, hogy $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ egységei éppen a redukált maradékosztályok!
   b) Bizonyítsd be, hogy a következők ekvivalensek:

   1. m prímszám 2. $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ integritási tartomány 3. $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ test

---

8. Melyek igazak az alábbiak közül minden w, z komplex számra?
   a) $z = w \implies |z| = |w|$, b) $|z| = |w| \implies z = w$,
   c) $z = w \implies \bar{z} = \bar{w}$, d) $\bar{z} = \bar{w} \implies z = w$

9. Ábrázold a következő egyenletek megoldásait a komplex számsíkon!
   a) $|z| = 3iz$, b) $|z| = iz$ és c) $z + \bar{z} < 4$.

10. Legyen $z = 1 + 3i$ és $w = 2 - i$. Számold ki a következőket
    a) $z\bar{z}$, b) $w/\bar{w}$, c) $|z - w|$, d) $|2z - zw|$, és e) $|w/z\bar{w}^3|$.

11. Mik az $1 - 2i$ komplex szám gyökei? (azaz azon $w = x + yi$ komplex számok, melyre $w^2 = 1 - 2i$)

12. * Bizonyítsd be a Wilson-tételt: ha $p > 0$ prím, akkor $(p-1)! \equiv -1 \pmod{p}$.
    Útmutatás:
    a) Alakíts ki (a, a^{-1}) alakú párokat! (miért lehet ezt megcsinálni?)
    b) Melyek nem is igazi párok? (próbáld ki valamely $p > 3$ prímre és bizonyítsd be felhasználva, hogy $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$-ben nincs nullosztó).
    c) Számold ki a szorzatot „páronként”!

13. * Legyen $\mathbb{H} = \{a + bi + cj + dk | a, b, c, d \in \mathbb{R}\}$ halmaz a következő műveletekkel:
    $+$: $(a + bi + cj + dk) + (a' + b'i + c'j + d'k) = (a + a)' + (b + b')i + (c + c')j + (d + d')k)$
    $\cdot$ úgy definiálva, hogy a disztributivitás és a következő azonosságok igazak legyenek:

    $$i^2 = j^2 = k^2 = -1, ij = -ji = k, jk = -kj = i \text{ és } ki = -ik = j$$

    (például $(j + 2k)(j - 3i) = j^2 - 3ji + 2kj - 6ki = -1 + 3k - 2i - 6j$)
    a) Mutasd meg, hogy $(\mathbb{H}, +, \cdot)$ egy nem-kommutatív gyűrű! (a Hamilton-kvaterniók gyűrűje)
    b) Lásd be, hogy minden nem 0 elemnek van multiplikatív inverze!
    (Azaz $(\mathbb{H}, +, \cdot)$ „nem kommutatív test”= ferdetest). Ötlet: $(a+bi+cj+dk)(a-bi-cj-dk) \in \mathbb{R}$.

A feladatsorok elérhetők az előadó honlapján: `www.math.bme.hu/~merdelyi/bevalg1/`