1. Legyenek $p, q \in \mathbb{Z}[x]$ polinomok. Melyek igazak az alábbiak közül?
   a) Ha p és q primitív, akkor $p + q$ is primitív.
   b) Ha pq primitív, akkor p és q is primitív.
   c) Ha $p(0) = 1$, akkor nincs p-nek nincs egész gyöke.
   d) Ha p egy főegyütthatós, $p(0) = 1$ $p(1)p(-1) \neq 0$, akkor p-nek nincs racionális gyöke.

2. Mely c egészekre van az $x^3 + 2x^2 + cx + 4$ polinomnak racionális gyöke?

3. Tekintsük az $x^4 - 6x^3 + 9x^2 + 3$ polinomot. Irreducibilis-e $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$ és $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ felett?

4. Legyen p páratlan prím. Mutasd meg, hogy $\Phi_{2p}(x) = \Phi_p(-x)$. Bizonyítsd be, hogy ez a polinom irreducibilis!

5. * Mutasd meg, hogy ha $p \in \mathbb{Q}[x]$ irreducibilis, akkor nincs többszörös gyöke $\mathbb{C}$-ben!

---

6. Mi a következő komplex polinomok gyöktényezős alakja?
   a) $x^3 - 1$, b) $x^6 + 1$ és c) $x^4 + x^2 + 1$.

7. Bontsd fel a $2x^6 - x^5 - 9x^4 + 4x^3 - 6x^2 + 5x + 5$ polinomot Irreducibilisek szorzatára $\mathbb{Q}[x]$-ben és $(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})[x]$-ben.

8. a) Ellenőrizd, hogy $\Phi_{12}(x) = x^4 - x^2 + 1$.
   b) Mutasd meg, hogy $\Phi_{12}(ax+b)$ semmilyen $a \neq 0, b \in \mathbb{Z}$-re és p prímre nem teljesíti a Schönemann-Eisenstein kritérium feltételeit!
   c) Mutasd meg, hogy minden p prímre $\Phi_{12}(x)$ mod p nem irreducibilis $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})[x]$-ben.
   d) Bizonyítsd be „kézzel”, hogy $\Phi_{12}(x)$ irreducibilis $\mathbb{Z}[x]$-ben!

9. * Legyen p prím. Mutasd meg, hogy $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ nem algebrailag zárt.

10. * a) Mutasd meg, hogy $x^p - x = \prod_{\substack{\deg f = 1 \\ f \text{ irred}}} f(x)$.
    b)Bizonyítsd be, hogy $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ felett $\binom{p}{2}$ darab egy főegyütthatós 2 fokú irreducibilis polinom van.
    c) Mutasd meg, hogy $x^{p^2} - x = \prod_{\substack{\deg f \leq 2 \\ f \text{ irred}}} f(x)$.
    Segítség: mutasd meg, hogy $x^{p^2} - x \in (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})[x]$ irreducibilisekre bontásban semelyik tag nem szerepelhet kétszeres multiplicitással.

A feladatsorok elérhetők az előadó honlapján: `www.math.bme.hu/~merdelyi/bevalg1/`