

- Legyen  $\alpha, \beta$  and  $\gamma$  az  $x^3 - 2x^2 + 4x + 6$  polinom komplex gyökei. Mi az az egy főegyütthatós polinom, aminek a gyökei  $\alpha + \beta, \beta + \gamma$  és  $\gamma + \alpha$ ?  
(Útmutatás: ne számold ki a gyököket, használd a Vieta-formulákat!)
- a) Mutasd meg, hogy ha  $p \in \mathbb{Z}[x]$  és  $a, b \in \mathbb{Z}$ , akkor  $a - b \mid p(a) - p(b)$ !  
b) Keresd olyan  $f \in \mathbb{Z}[x]$  polinomot, melyre  $\{f(-2), f(1), f(3)\} = \{2, 6, 11\}$ !

3. Oldd meg a következő lineáris egyenletrendszereket!

$$\begin{array}{lll} \text{a) } x + & y + & z = 10 \\ & x + 2y + & 3z = 23 \\ & x + 4y + & 9z = 59 \end{array} \quad \begin{array}{lll} \text{b) } x - & y - & z = 1 \\ & x + & y + 2z = 2 \\ 5x + & y + & 4z = 3 \end{array} \quad \begin{array}{lll} \text{c) } x - & y - & z = 1 \\ & x + & y + 2z = 2 \\ 5x + & y + & 4z = 8 \end{array}$$

- Van-e olyan lineáris egyenletrendszer, melyben
  - 5 egyenlet, 6 ismeretlen van és egyetlen megoldása van;
  - 6 egyenlet, 5 ismeretlen van és egyetlen megoldása van;
  - 5 egyenlet, 6 ismeretlen van és nincs megoldása;
  - 5 egyenlet, 5 ismeretlen van és pontosan 5 megoldása van ( $\mathbb{R}$  felett és tetszőleges test felett)?

- \* a) Mutasd meg, hogy az  $ax^3 + bx^2 + cx + d$  egyenletet leosztva  $a \neq 0$ -val és átírva az  $y = x + \frac{b}{3a}$  változóra  $y^3 + py + q$  alakú lesz (azaz az  $y^2$  együtthatója 0 lesz).  
b) Mutasd meg, hogy ha találunk olyan  $u$ -t és  $v$ -t melyre  $\begin{cases} u^3 + v^3 = -q \\ u^3 v^3 = -\left(\frac{p}{3}\right)^3 \end{cases}$ , akkor  $y = u + v$  megoldása lesz az eredeti egyenletnek.  
c) Lásd be, hogy az  $u = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$  és  $v = -\frac{p}{3u}$  megfelelő választás.  
d) Legyen  $D = \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3$  Mutasd meg, hogy az eredeti egyenlet valós gyökeinek a száma

$$\begin{cases} 1 \text{ egyszeres multiplicitással,} & \text{ha } D > 0, \\ 1 \text{ háromszoros multiplicitással,} & \text{ha } D = 0 \text{ és} \\ 3 \text{ egyszeres multiplicitással,} & \text{ha } D < 0. \end{cases}$$

- Számold ki az  $x^3 + 3x^2 + 9x + 5$  polinom gyökeit a Cardano-formula segítségével!
- Oldd meg a következő lineáris egyenletrendszereket  $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ -ben!

$$\begin{array}{lll} \text{a) } x + & 2y + & z = 4 \\ & x + 3y + & 4z = 3 \\ & 2x - & y + 5z = 1 \\ & & y + 7z = 3 \end{array} \quad \begin{array}{lll} \text{b) } & -y + & 2z + 3w = 1 \\ 2x + & 3y + & 4z + 5w = 2 \\ 2x + & 2y + & z - 2w = 2 \end{array}$$

- Az  $a$  és  $b$  paraméterek értékétől függően hány megoldása van az alábbi egyenletrendszernek?  
Oldd meg a feladatott  $\mathbb{R}, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  és  $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$  felett!

$$\begin{array}{lll} x + & y & = 1 \\ x + & 2y - & az = b \\ x + & 3y + & az = 0 \end{array}$$