

1. Invertálhatók-e a következő mátrixok? Ha igen, számold ki az inverzüket!

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 6 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

2. Oldd meg a következő mátrix-egyenleteket (A, B, C és D mint az előbbi feladatban)!

a) $CX = D$, b) $BX = C$, c) $XB = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, $XB = A \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

3. Számold ki az $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ mátrix rang-felbontását és írd A -t $\text{rk}(A)$ darab diadikus mátrix összegeként!

4. * Mutasd meg, hogy ha egy A mátrix sorlépcsős alakja elérhető sorcserek nélkül, akkor A felírható $A = LU$ alakban, ahol L alsó háromszög mátrix (Lower triangular) és U felső háromszög mátrix (Upper triangular). Ez A LU felbontása.

5. Mi az $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 8 & 14 \\ 2 & 5 & 13 \end{pmatrix}$ mátrix LU felbontása?

6. Mutasd meg, hogy a $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ mátrixnak nincs LU felbontása!

7. Mi az alábbi $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ lineáris leképezések mátrixa?

a) Tükrözés az $x = y$ síkra,

b) Az y tengely körüli 45° -os, órajárással ellentétes forgatás és

c) Az $x = y = z$ tengely körül 120° -os forgatás.

8. Írd le az alábbi mátrixokhoz tartozó lineáris leképezéseket geometriai transzformációk segítségével:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$

9. Tekintsünk egy $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ lineáris leképezést, melyre $0 \neq \text{Im}(\varphi) \leq \text{Ker}(\varphi)$. Mi $\text{rk}(\varphi)$? Itt $\text{rk}(\varphi) = \text{rk}([\varphi])$, a φ mátrixának a rangja.