Bevezetés az Algebrába 1 **Mintavizsga** **2024.12.05.**

120 percig lehet a feladatokon dolgozni, a vizsga 40 ponttól sikeres (a 80-ból).

A következő feladatok megoldásoakor nem kell a választ indokolni, csak bejelölni, vagy beírni a végeredményt. Az első feladat $6 = 6 \cdot 1$ pontot ér, a többi 2-2 pontot.

A1 Mely állítások igazak az alábbiak közül?

a) $\lfloor -x \rfloor = -\lceil x \rceil$ minden $x \in \mathbb{R}$-re.

b) Ha $\{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$ egy teljes maradékrendszer modulo m és $b \neq 0$ egész, akkor $\{ba_1, ba_2, \ldots, ba_m\}$ is teljes maradékrendszer.

c) Ha $p \in \mathbb{F}[x]$ irreducibilis, akkor nincs gyöke az $\mathbb{F}$ testben.

d) $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ felett bármely két különböző nemnulla vektor lineárisan független.

e) Ha $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ invertálható, akkor minden i-hez van olyan j, hogy A_{ij} előjeles aldetermináns nem 0.

f) Ha $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ rangja n, akkor $A^T \cdot A$ invertálható.

A2 Az alábbi halmazok közül melyik jól rendezett (részhalmaza $\mathbb{R}$-nek?
$A = [0, 1]$ intervallum, $B = \left\{ \frac{1}{n} \middle| n \in \mathbb{N} \right\}$ és $C = \left\{ 1 - \frac{1}{n} \middle| n \in \mathbb{N} \right\}$

A3 Váltsd át 2024-et 8-as számrendszerbe!

A4 Mi az $5x \equiv 26 \pmod{23}$ kongruencia megoldása?

A5 Mik $(1 + 2i)^4$ negyedik gyökei? A választ algebrai alakban add meg!

A6 Mutass egy olyan p prímszámot, melyre $x^3 + 2x + 5$ irreducibilis modulo p.

A7 Írd $x^9 - 1$-t körosztási polinomok szorzataként! Mi a tagok fokszáma?

A8 Mennyi a $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ mátrix nullterének dimenziója $\mathbb{Q}$ és $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ felett?

A9 Mi a $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}^{-1}$ bal alsó eleme?

A10 $\det(A) = 2$ valamely $A = (\underline{a}, \underline{b}, \underline{c})$ mátrixra. Mennyi a $B = (2\underline{c} - \underline{a}, -\underline{c}, 3\underline{b})$ mátrix determinánsa? (a vektorok a mátrixok oszlopvektorai)

A következő feladatoknál a kért definíciókat és tételeket precízen ki kell mondani és a kapcsolódó feladatot részletesen megoldani. Mindegyik feladat 7 pontot ér.

B1 a) Definiáld az Euler-féle φ függvényt!
b) Mondd ki az Euler-Fermat és a kis Fermat-tételeket!
c) Mutasd meg, hogy az előbbiekben a modulusra és a hatvány alapjára vonatkozó feltételek szükségesek (azaz adj konkrét ellenpéldát olyan esetben, amikor a feltételek nem teljesülnek)!

B2 a) Definiáld a mátrixok rangját!
b) Mondd ki a mátrixműveletek és a rang összefüggéseit leíró tételt!
c) Mutass olyan A és B nemnulla mátrixokat, melyekre $\mathrm{rk}(A+B) = \mathrm{rk}(A) + \mathrm{rk}(B)$!

A következő feladatoknál a megoldáshoz részletes indoklás kell. Mindegyik feladat 7 pontot ér.

C1 Oldd meg a következő kongruenciarendszert!

$$\begin{aligned} x &\equiv 2 \pmod 4 \\ x &\equiv -1 \pmod 3 \\ x &\equiv 3 \pmod 7 \end{aligned}$$

C2 Mik a $\dfrac{z^3}{z^3+i} = 1+i$ egyenlet komplex megoldásai?

C3 Bontsd fel az $f(x) = x^5 + x^4 - 2x^2 + 2$ polinomot irreducibilisek szorzatára $\mathbb{Q}$ és $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ felett!

C4 Tekintsük a következő $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ lineáris transzformációkat:
φ : az yz síkra tükrözés
ψ : a z-tengely körüli $+90°$-os forgatás.

a) Mi a sztenderd mátrixa φ-nek,ψ-nek és $\psi \circ \varphi$-nek? (A kompozíciónál először tükrözünk és utána forgatunk)

b) Számold ki $\psi(\varphi((1,2,3)^T))$-t!

C5 Mennyi az alábbi A mátrix rangja? Add meg az oszlopterének és a sorterének egy-egy bázisát. Keress egy $\mathrm{rk}(A)$ méretű nemnulla aldeterminánst!

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

C6 Számold ki a következő determinánst!

$$\left| \binom{j+k-2}{j-1} \right|_{n\times n} = \begin{vmatrix} \binom{0}{0} & \binom{1}{1} & \cdots & \binom{n-1}{n-1} \\ \binom{1}{0} & \binom{2}{1} & \cdots & \binom{n}{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \binom{n-1}{0} & \binom{n}{1} & \cdots & \binom{2n-2}{n-1} \end{vmatrix}.$$