

Vizsgatematika – definíciók, tételek és bizonyítások

(**D** = definíció, **T** = tétel, **B** = tétel + bizonyítás)

1. Egészek

- D** Számfogalmak ($\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$), algebrai és transzcendens számok, jólrendezett halmazok, valós számok egész- és törtrésze, lánc törtek, gyűrűk és testek,
- T** Jólrendezettségi tétel, közelítés lánc törtekkel,
- B** $\sqrt{2}$ irracionális, teljes indukció sémája (a jólrendezettségi tétellel bizonyítva), Dirichlet approximáció.

2. Euklideszi algoritmus

- D** oszthatóság, egységek, legnagyobb közös osztó, legkisebb közös többszörös, lineáris diofantoszi egyenletek,
- T** Oszthatóság tulajdonságai, maradékos osztás, számrendszerek, Horner-módszer,
- B** A legnagyobb közös osztó létezése, kibővített Euklideszi algoritmus (a legnagyobb közös osztó előáll a számok kombinációjaként), a legnagyobb közös osztó tulajdonságai.

3. Prímek és irreducibilisek

- D** irreducibilisek és prímek,
- T** Legendre-formula a p kitevőjére $n!$ -ban,
- B** prímek = irreducibilisek \mathbb{Z} -ben, végtelen sok prím van, a számelmélet alaptétele.

4. Számolás maradékokkal

- D** $a \equiv b \pmod{m}$, maradékosztályok, teljes és redukált maradékrendszerek, az Euler-féle φ -függvény, moduláris inverz,
- T** Kongruenciák műveleti tulajdonságai, teljes és redukált maradékrendszerek lineáris transzformáltjai, φ kanonikus alakja, lineáris kongruenciák megoldása és megoldásszáma, $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ mikor gyűrű és mikor test,
- B** Kongruenciák osztása, Euler-Fermat tétel, kis Fermat tétel, kínai maradéktétel.

5. Komplex számok

- D** Komplex számok, algebrai és trigonometrikus alak, konjugált, abszolút érték, egységgyökök, rend és primitív gyökök,
- T** \mathbb{C} egy test, műveletek algebrai és trigonometrikus alakban, a konjugált és az abszolút érték tulajdonságai, az algebra alaptétele,
- B** Mikor egyezik meg két trigonometrikus alak, n . egységgyökök rendje osztója n -nek, a primitív n . egységgyökök száma.

6. Polinomok számelmélete

- D** kommutatív gyűrűk feletti polinomok, oszthatóság, polinomok legnagyobb közös osztója, irreducibilis és primitív polinomok,
- T** $R[x]$ kommutatív gyűrű, $\mathbb{F}[x]$ -ben maradékos osztás, legnagyobb közös osztó létezése, Euklideszi algoritmus, alacsony fokú polinomok mikor irreducibilisek, $\mathbb{Q}[x]$ -ben egységek és primitívek szorzatára bontás, számelmélet alaptétele $\mathbb{F}[x]$ -ben, speciálisan $\mathbb{R}[x]$ -ben, $\mathbb{C}[x]$ -ben, $\mathbb{Q}[x]$ -ben és $\mathbb{Z}[x]$ -ben,
- B** Gauss lemma (primitív polinomok szorzata primitív), Schönemann-Eisenstein kritérium.

7. Polinomok gyökei

- D** Gyökök és elsőfokú osztók közötti összefüggés, formális deriváltak, körosztási polinomok, többváltozós polinomok, szimmetrikus és elemi szimmetrikus polinomok,
- T** Vieta-formulák, polinom interpoláció,
- B** Többszörös gyökök és a formális derivált kapcsolata, racionális gyökteszt, $x^n - 1 = \prod_{d|n} \Phi_d$.

8. Lineáris egyenletrendszerek

- D** Lineáris egyenletrendszerek (LER), LER mátrixa és kibővített mátrixa, elemi sorműveletek, sorlépcsős és redukált sorlépcsős alak, vezérelemek, szabad és kötött változók,
- T** LER megoldásszáma, LER megoldásainak leírása (paraméteresen és vektorokkal),
- B** Gauss és Gauss-Jordan elmináció, összefüggés a mátrix rangjával.

9. Vektorterek

- D** Műveletek \mathbb{F}^n -ben, vektorterek, alterek, affin alterek, lineáris kombinációk, feszített alterek, lineáris függetlenség, generátorok, bázisok, dimenzió, koordinátavektorok,
- T** \mathbb{F}^n műveleti tulajdonságai, bázisok ekvivalens leírásai,
- B** "lineárisan független halmaz = egyik sem áll elő a többi kombinációjaként", független- és generátorhalmazok tulajdonságai, LER megoldáshalmaza affin altér.

10. Mátrixok

- D** Mátrixok műveletei, $\mathcal{S}(A)$, $\mathcal{O}(A)$ és $\mathcal{N}(A)$, rang, inverz, speciális mátrixok (diagonális, háromszög, permutáció, elemi),
- T** Műveleti tulajdonságok, A , B és AB oszlopai közötti összefüggés, bázis keresése az $\mathcal{S}(A)$, $\mathcal{O}(A)$ és $\mathcal{N}(A)$ alterekben,
- B** Rang és mátrixműveletek közötti összefüggések, a mátrix invertálhatóságának ekvivalens alakjai.

11. Lineáris leképezések

- D** Lineáris leképezések, magtér, képtér, lineáris leképezés mátrixa,
- T** Forgatások mátrixa, magtér és képtér összefüggés a mátrixhoz definiált alterekkel, transzformációmátrixok tulajdonságai,
- B** Bázistranszformáció, dimenziótétel.

12. Determináns

- D** A determináns elvűrt tulajdonságai, permutációk és inverziók, a determináns definíciója (az elemek segítségével), előjeles aldeterminánsok,
- T** Műveletek és determináns, linearitás a sorokban, speciális mátrixok determinánisa, kifejtés, inverz leírása determinánsokkal, Cramer-szabály,
- B** A determináns egyértelműsége, $\det(AB) = \det(A) \det(B)$, a determináns és a rang közötti összefüggés.