Bevezetés az Algebrába 1 **1. zárthelyi** **2024.10.14.**

Megoldás

1. Mutasd meg, hogy minden $n \in \mathbb{N}$-re

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(4k-3)(4k+1)} = \frac{1}{1\cdot 5} + \frac{1}{5\cdot 9} + \frac{1}{9\cdot 13} + \cdots + \frac{1}{(4n-3)(4n+1)} = \frac{n}{4n+1}. \qquad \text{(3 pont)}$$

MO Teljes indukció n-re. $n=1$ esetén $1/(1\cdot 5) = 1/(4\cdot 1+1)$.

$n \to n+1$. Az indukciós feltevésből

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{(4k-3)(4k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(4k-3)(4k+1)} + \frac{1}{(4(n+1)-3)(4(n+1)+1)} =$$
$$\frac{n}{4n+1} + \frac{1}{(4(n+1)-3)(4(n+1)+1)}.$$

Közös nevezőre hozva:

$$\frac{n}{4n+1} + \frac{1}{(4(n+1)-3)(4(n+1)+1)} = \frac{(4n+5)n+1}{(4n+1)(4n+5)} = \frac{(4n+1)(n+1)}{(4n+1)(4n+5)} = \frac{n+1}{(4(n+1)+1)}.$$

2. Mik a $18x + 30y = 66$ diofantoszi egyenlet egész és természetes megoldásai? (3 pont)

MO Az euklideszi algoritmusból $(18,30) = 6 = 2\cdot 18 + (-1)\cdot 30$. Ez osztója 66-nak, tehát van megoldás, pl $x_0 = \frac{66}{(18,30)} \cdot 2 = 22$ és $y_0 = \frac{66}{(18,30)} \cdot (-1) = -11$. Az egész megoldások ez alapján

$$x = x_0 + \frac{30}{(18,30)}t = 22 + 5t \qquad y = y_0 - \frac{18}{(18,30)}t = -11 - 3t.$$

A természetes megoldásokhoz $22 + 5t > 0$, így $t > -22/5$ és $-11 - 3t > 0$, így $t < -11/3$. Ebből $t = -4$ az egyetlen jó, tehát az egyetlen természetes megoldás $x = 22 - 4\cdot 5 = 2$ és $y = -11 - 3\cdot(-4) = 1$.

3. Legyen A_n az n legkisebb pozitív prímszám szorzata plusz 1 (például $A_1 = 2+1 = 3$, $A_2 = 2\cdot 3+1 = 7$ és $A_3 = 2\cdot 3\cdot 5 + 1 = 31$). Mutasd meg, hogy minden $n \in \mathbb{N}$-re $(A_n, A_{n+1}) = 1$! (3 pont)

MO A definíció szerint $A_{n+1} - A_n = \left(\prod_{k=1}^{n} p_k\right)(p_{n+1} - 1)$. A legnagyobb közös osztó tulajdonságait használva

$$(A_{n+1}, A_n) = (A_{n+1} - A_n, A_n) = \left(\left(\prod_{k=1}^{n} p_k\right)(p_{n+1} - 1), \prod_{k=1}^{n} p_k + 1\right).$$

A jobb oldalon szereplő első szám minden prímosztója legfeljebb p_n (hiszen $p_k \le p_n$ és $p_{n+1} - 1$ minden prímosztója legfeljebb p_n), a másodiké pedig legalább p_{n+1} (hiszen relatív prím p_k-hoz minden $k \le n$-re), így a két szám relatív prím.

Ugyanígy lehet $(A_{n+1} - p_{n+1}A_n, A_n)$-t is nézni.

4. Mennyi $5^{87} \pmod{43}$ és $6^{88} \pmod{21}$? A legkisebb nemnegatív maradékot add meg. (4 pont)

MO 43 prímszám, ezért $\varphi(43) = 42$ és $(43,5) = 1$ így az Euler-Fermat tétel szerint

$$5^{\varphi(43)} = 5^{42} \equiv 1 \pmod{43} \implies 5^{87} = 5^{2\cdot 42+3} \equiv 5^3 = 125 = 3\cdot 43 - 4 \equiv -4 \equiv 39 \pmod{43}.$$

$(6,21) = 3 > 1$, így itt nem lehet rögtön az Euler-Fermat tételt használni.

A kínai maradéktétellel ($M = 21$, $m_1 = 3 = M_2, m_2 = 7 = M_1$ és $x_2 = M_2^{-1} \pmod{m_2} = 3^{-1} = 5 \pmod 7$):

$$\begin{cases} 6^{88} \equiv 0 & \pmod 3 \\ 6^{88} \equiv (-1)^{88} = 1 & \pmod 7 \end{cases} \implies 6^{88} \equiv 0 \cdot x_1 \cdot 7 + 1 \cdot 5 \cdot 3 = 15 \pmod{21}$$

Lehet a kettőhatvány kitevőjűeket is számolni, a másodiknál például $6^2 = 36 \equiv -6 \pmod{21}$ és $(-6)^2 = 36 \equiv -6 \pmod{21}$ így $6^{2k} \equiv -6 \equiv 15 \pmod{21}$ minden $k \in \mathbb{Z}$-re tehát $6^{88} \equiv 15 \pmod{21}$.

5. Oldd meg a $|z| + z = 2 + i$ egyenletet a komplex számok halmazán! (3 pont)

MO Írjuk z-t algebrai alakban: $z = a + bi$ valamely a, b valósakra. Ekkor az egyenletet átírva és a valós és a képzetes részét nézve:

$$\sqrt{a^2 + b^2} + a + bi = 2 + i \iff \begin{cases} \text{Re:} & \sqrt{a^2 + b^2} + a = 2 \\ \text{Im:} & b = 1 \end{cases}$$

A másodikból $b = 1$, ezt visszaírva az elsőbe

$$\sqrt{a^2 + 1^2} + a = 2 \implies a^2 + 1 = (2 - a)^2 = 4 - 4a + a^2 \implies 4a = 3 \implies a = 3/4.$$

És ez tényleg jó is (hiszen $2 - a \geq 0$). Tehát az egyetlen megoldás $z = a + bi = 3/4 + i$.

6. Mi $(\sqrt{2} - \sqrt{6}i)^{99}$ algebrai alakja? (4 pont)

MO Írjuk $z = \sqrt{2} - \sqrt{6}i$-t trigonometrikus alakba: $z = r\,(\cos\varphi + i\sin\varphi)$!

Itt $r = \sqrt{\sqrt{2}^2 + (-\sqrt{6})^2} = \sqrt{8}$ és $\varphi = -60° = -\pi/3$ (ez utóbbi abból látszik, hogy a $0, \sqrt{8}, z$ háromszög szabályos, vagy hogy például $\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{\sqrt{2}}{-\sqrt{6}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ és z a 4. síknegyedben van).

A trigonometrikus alak hatványozási képletét használva

$$z^{99} = r^{99}\,(\cos(99\varphi) + i\sin(99\varphi)) = \sqrt{8}^{99}\,(\cos(-33\pi) + i\sin(-33\pi)) = \sqrt{8}^{99}\,(\cos\pi + i\sin\pi) = -\sqrt{8}^{99}.$$