Bevezetés az Algebrába 1 **2. zárthelyi** **2024.11.22.**

Megoldás

1. Oszd el az $a(x) = 2x^4 - x^2 + 3$ polinomot maradékosan $b(x) = x^2 - x + 1$-el! (3 pont)

MO A maradékos osztás:

$$\begin{array}{rrrrrl}
(2x^4 & & -x^2 & & +3) & :(x^2-x+1)=2x^2+2x-1\\
-(2x^4 & -2x^3 & +2x^2) & & & \\
\hline
 & 2x^3 & -3x^2 & & +3 & \\
 & -(2x^3 & -2x^2 & +2x) & & \\
\hline
 & & -x^2 & -2x & +3 & \\
 & & -(-x^2 & +x & -1) & \\
\hline
 & & & -3x & +4 &
\end{array}$$

Tehát $q(x) = 2x^2 + 2x - 1$ a hányados, $r(x) = -3x + 4$ a maradék és ezzel $a(x) = q(x)b(x) + r(x)$.

2. Bontsd fel a $p(x) = x^5 + 2x^4 + 5x^3 + 2x^2 - 8x - 6$ polinomot irreducibilisek szorzatára $\mathbb{Z}$ és $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ felett! (4 pont)

MO A racionális gyökteszt szerint a lehetséges gyökök $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$. A Horner-módszerrel

	1	2	5	2	−8	−6	
~~1~~	~~1~~	~~3~~	~~8~~	~~10~~	~~2~~	~~−4~~	$\implies r = 1$ nem gyök
−1	1	−1	4	−2	−6	0	$\implies r = -1$ gyök
−1	1	0	4	−6	0		$\implies r = -1$ kétszeres gyök

Ebből $p(x) = (x+1)^2(x^3 + 4x - 6)$. Mivel $2 \nmid 1, 2|4, -6$ és $2^2 \nmid -6$, az $x^4 + 4x - 6$ polinom teljesíti a Schönemann-Eisenstein kritérium feltételeit a 2 prímmel és így irreducibilis $\mathbb{Z}[x]$-ben. Tehát az egészek feletti irreducibilisekre bontás $p(x) = (x+1)^2(x^3 + 4x - 6)$.

Ugyanez egy felbontás $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ felett is, és így itt $p(x) = (x+1)^2(x^3+4x-6) = x(x+1)^2(x^2+1)$. A jobb oldalon szereplő másodfokú tag irreducibilis, hiszen nincs gyöke $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$-ben, így $p(x) = (x+1)^2(x^3 + 4x - 6) = x(x+1)^2(x^2+1)$ a $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ feletti irreducibilisekre bontás.

3. Az a pozitív paraméter mely értékére lesz az $x^4 - ax^3 + x^2 - ax - 1$ polinom gyökeinek a reciprokösszege éppen egyenlő a négyzetösszegükkel? Hány valós gyök van ilyenkor? (3 pont)

MO Jelöljük a komplex gyököket (multiplicitással) $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ és α_4-gyel és a polinomban x^j együtthatóját a_j-vel. A Vieta-formulák szerint

$$\sum_{j=1}^{4} \alpha_j^2 = \left(\sum_{j=1}^{4} \alpha_j\right)^2 - 2 \sum_{1 \le i < j \le 4} \alpha_i \alpha_j = \left(-\frac{a_3}{a_4}\right)^2 - 2\frac{a_2}{a_4} = a^2 - 2$$

$$\sum_{j=1}^{4} \frac{1}{\alpha_j} = \left(\sum_{j=1}^{4} \prod_{i \ne j} \alpha_i\right) \Bigg/ \left(\prod_{j=1}^{4} \alpha_j\right) = \left(-\frac{a_1}{a_4}\right) \Big/ \left(\frac{a_0}{a_4}\right) = a/(-1) = -a$$

Ez akkor egyenlő, ha $a^2 - 2 = -a$, azaz ha $a^2 + a - 2 = 0$, tehát ha $a = 2$, vagy $a = -1$. Mivel a pozitív, $a = 2$ kell legyen.

Ilyenkor a gyökök négyzetösszege $-a = -2 < 0$, van nem valós gyök is. Ekkor ennek a konjugáltja is gyök, és ezért legfeljebb két valós gyök lehet. Kettő van is, hiszen ha csak nem valós gyökök lennének, akkor ez két konjugált pár lenne – mondjuk $\alpha_2 = \bar{\alpha}_1$ és $\alpha_4 = \bar{\alpha}_3$, és ekkor

$$-1 = \frac{a_0}{a_4} = \prod_{j=1}^{4} \alpha_j = \alpha_1 \cdot \bar{\alpha}_1 \cdot \alpha_3 \cdot \bar{\alpha}_3 = |\alpha_1|^2 \cdot |\alpha_3|^2 > 0,$$

ami ellentmondás. (Vagy a a polinom a 0 nulla helyen negatív értéket vesz fel, a határértéke $\pm\infty$-ben pedig $+\infty$, így a Bolzano-tétel szerint van pozitív és negatív gyök is.)

4. A c és d paraméter mely értékére metszenek az $x+y+cz=3$, $x-y=d$ és $x-2y+z=-3$ síkok egy egyenesben? (3 pont)

MO Gauss-eliminációval sorlépcsős alakra hozzuk az egyenletrendszert:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & c & 3 \\ 1 & -1 & 0 & d \\ 1 & -2 & 1 & -3 \end{array}\right) \xrightarrow{(1)\leftrightarrow(2)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & -3 \\ 1 & -1 & 0 & d \\ 1 & 1 & c & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{(2)-(1)\\(3)-(1)}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & d+3 \\ 0 & 3 & c-1 & 6 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{(3)-3(2)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & d+3 \\ 0 & 0 & c+2 & -3-3d \end{array}\right)$$

A síkok akkor metszenek egy egyenesben, ha végtelen sok megoldás van, azaz ha van szabad változó – tehát $c=-2$ – és nincs ellentmondó sor – tehát $d=-1$.

5. Legyen $\underline{v}_1 = (1,3,4,5)^T$, $\underline{v}_2 = (0,1,-2,3)^T$, $\underline{v}_3 = (2,5,10,7)^T$, $\underline{v}_4 = (1,1,1,1)^T$ és $\underline{v}_5 = (4,10,13,16)^T \in \mathbb{R}^4$. Válassz közülük egy maximális független rendszert és írd a többi vektort lineáris kombinációjukként! Hány dimenziós $\mathrm{Span}(\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3, \underline{v}_4, \underline{v}_5)$? (4 pont)

Gauss-Jordan elimináció a $(\underline{v}_1|\underline{v}_2|\underline{v}_3|\underline{v}_4|\underline{v}_5)$ mátrixra:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & 5 & 1 & 10 \\ 4 & -2 & 10 & 1 & 13 \\ 5 & 3 & 7 & 1 & 16 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{(2)-3(1)\\(3)-4(1)\\(4)-5(1)}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & -2 \\ 0 & -2 & 2 & -3 & -3 \\ 0 & 3 & -3 & -4 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{(3)+2(2)\\(4)-3(2)}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -7 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{-(3)/7} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{(1)-(3)\\(2)+2(3)\\(4)-2(3)}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

A vezérelemek az első, a második és a negyedik oszlopban vannak, ezért egy maximális független rendszer $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_4\}$, a feszített altér dimenziója pedig 3. A harmadik és az ötödik oszlop szerint $\underline{v}_3 = 2\underline{v}_1 - \underline{v}_2$ és $\underline{v}_5 = 3\underline{v}_1 + \underline{v}_4$.

6. a) Mely $m, n \in \mathbb{N}$-re vannak olyan $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ és $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$ mátrixok, melyekre $AB=0$, de $BA \neq 0$?
b) Igaz-e, hogy $AB = 0 \implies (BA)^2 = 0$?
(3 pont)

MO a) Ha $n=1$, akkor nincs ilyen $A = (a_1, \dots, a_m)^T \in \mathbb{R}^{m\times 1}$ és $B = (b_1, \dots, b_m)$. Mert ekkor $AB = (a_ib_j) = 0$ azt jelenti, hogy $a_ib_j = 0$ minden $1 \le i,j \le m$-re, ás így $BA = \sum_{j=1}^{m} b_ja_j = 0$.

Ha $n > 1$, akkor van, például legyen A az az $m \times n$-es mátrix aminek a bal felső sarkában 1 van, mindenhol máshol 0, és B az az $n \times m$-es mátrix, melynek a bal alsó sarkában 1 van, mindenhol máshol 0. Ekkor $AB = 0$, de BA jobb alsó sarkában 1 van.

b) Igaz, hiszen ha $AB=0$, akkor $(BA)^2 = (BA)(BA) = B(AB)A = B0A = 0$.