

Differenciálegyenletek és numerikus módszerek mérnököknek

Mincsovics Miklós Emil

2020. szeptember 8.

Tartalomjegyzék

1. Közönséges differenciálegyenletek – bevezető	1
1.1. Elsőrendű differenciálegyenletek	1
1.1.1. Néhány elsőrendű megoldható típus	1
1.1.2. Modellezés elsőrendű differenciálegyenletekkel	17
1.2. Másodrendű differenciálegyenletek	24
1.2.1. Másodrendű lineáris differenciálegyenletek	24
1.2.2. Modellezés másodrendű differenciálegyenletekkel	34
1.3. Közönséges differenciálegyenletek kvalitatív vizsgálata	41
2. Közönséges differenciálegyenletek – elméleti rész	47
2.1. A megoldás létezése és egyértelműsége	47
2.1.1. Előkészületek – Metrikus terek	52
2.1.2. Megoldás létezése és egyértelműsége	55
2.2. Stabilitás	61
3. Kezdetiérték problémák numerikus megoldási módszerei	67
3.1. Numerikus megoldási módszerek – bevezető	67
3.1.1. Numerikus módszerek konstruálása	68
3.1.2. Az implicittség kezelése	72
3.2. Numerikus megoldási módszerek – elméleti rész	86
3.2.1. Normált terek, folytonos lineáris leképezések	86
3.2.2. Az explicit-Euler módszer elemzése	91
3.2.3. További módszerek elemzése	96
3.2.4. Matlab	101
4. Közönséges differenciálegyenletrendszerek	105
4.1. Lineáris rendszerek	109
4.1.1. Állandó együtthatós lineáris rendszerek megoldása	109

4.1.2.	Állandó együtthatós lineáris rendszerek fázisképe . . .	119
4.2.	Nemlineáris autonóm rendszerek	134
4.2.1.	Nemlineáris autonóm rendszerek fázisképe	134
4.2.2.	Stacionárius pontok és stabilitásuk	139
4.2.3.	Stacionárius pontok stabilitásvizsgálata Ljapunov módszerrel	148
4.2.4.	Periodikus pályák	160
4.3.	Matlab	165
5.	Függelék	167
5.1.	Analízis	167
5.2.	Vektorterek, lineáris leképezések	172

Előszó

Ez a könyv két, a Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetemen gépészmérnököknek tartott tárgyhoz készült jegyzet. A két tárgy: Differenciálegyenletek gépészmérnököknek, melyet a BSc képzés utolsó évében tanulnak egy szakirányon, míg a másik ennek angol nyelvű kibővített változata, melyet az angolnyelvű MSc képzésen tanulnak. Az anyag négy év tanítási tapasztalatán keresztül alakult és nyerte el ezt a formáját. A jegyzet ezen tárgyak anyagának nagy részét (de nem egészét) fedi le. Mindez nem jelenti azt, hogy mások nem forgathatják. Olyanok számára íródott, akik nem matematikusok, de van igényük precizításra, illetve már hallottak differenciálegyenletekről, egy-két alapvető típussal már találkoztak is, de komolyabban még nem foglalkoztak a témával. Továbbá szeretnének megismerkedni a numerikus közelítő módszerekkel.

Örök kérdés, hogy miért kell még egy jegyzet egy olyan témából, ahol havonta több könyv is megjelenik. Magyar nyelvű szakirodalom is található. Ezek elég széles skálán mozognak, kezdve a Bolyai-sorozatban megjelent [S01] könyvvel, ami kitűnő receptgyűjteményként működik, míg a másik végpont a matematikus hallgatóknak íródott [TS09] könyv. A mi jegyzetünk a kettő között helyezkedik el. Ez azt jelenti, hogy nem csak egy receptgyűjteményt tart az Olvasó a kezében, hanem a sok példa mellett elméleti kérdések is tárgyalásra kerülnek, tételeket bizonyítunk, nem csak kimondunk. Ugyanakkor nem megyünk el teljesen elméleti irányba és nem törekszünk a tételek legélesebb formában való kimondására. Fontosnak tartottuk olyan témák bemutatását, mint a metrikus terek, normált terek, folytonos lineáris leképezések, amiket csak felhasználnak a differenciálegyenletek és numerikus módszereik tárgyalásánál, mivel a mérnök hallgatók általában nem tanulnak erről. Továbbá mellékeljük az analízis és lineáris algebrai alapismereteket is a Függelékben.

A téma már klasszikusnak számít, így természetesen felhasználtunk más könyvek anyagát is, merítettünk például a fentebb említett két könyvből, emellett az ELTE-n matematikus hallgatóknak tartott Differenciálegyenletek tárgy gyakorlatanyagát. Az angol nyelvű könyvek közül az alábbiak voltak hatással a jegyzetre: [BDH12], [BDM17], [HSD04], [S94].

Ebben a témakörben, ha alkalmazásokra kerül sor, ma már elképzelhetetlen, hogy kimaradjon a numerikus közelítő módszerek tárgyalása. Ezt szem előtt tartottuk a jegyzet írása folyamán. Mind az egyes típusok megoldásánál, mind a megoldások vizualizálásánál megadtuk a Matlabot kódot, amivel az Olvasó reprodukálhatja az ábrákat, illetve megoldhatja az egyes feladatokat, továbbá egyszerűen módosíthatja ezeket más feladatok megoldásához. A

numerikus közelítések tárgyalásánál eleve cél a számítógép használata, itt is mellékelünk több kódot, amik egyszerűen módosíthatóak további feladatok megoldására, illetve más módszerek implementálására. A numerikus módszerek részre a [AP98] könyv volt hatással. Megjegyezzük, hogy a numerikus módszerek elméleti részének tárgyalását másképp végezzük, mint a szokásos út, amelyet nehézkesnek és túl technikásnak éreztünk.

A fenti könyvek mind kiegészítésként, mind mélyebb tudás elsajátítása szempontjából kitűnő további olvasmányok. Ezen kívül még a [TBD18] könyvet ajánljuk az Olvasó figyelmébe, mely egyrészt az alapoktól halad egészen a jelenlegi kutatásokig, mindezt változatos témákban és kitűnő stílusban teszi.

1. fejezet

Közönséges differenciálegyenletek – bevezető

1.1. Elsőrendű differenciálegyenletek

1.1.1. Néhány elsőrendű megoldható típus

Közönséges differenciálegyenletek olyan függvényegyenletek, amelyek a keresett függvény – melyet $y(t)$ -vel fogunk jelölni – deriváltját – vagyis az $\dot{y}(t)$ függvényt – tartalmazzák. A legegyszerűbb ilyen típus, ahol $\dot{y}(t)$ egy megadott függvény, ezek az integrálható típusúak.

Integrálható típusú. Például

$$\dot{y}(t) = e^t.$$

A megoldás egyszerű, hiszen csak integrálnunk kell a jobb oldalt, és meg is kaptuk, hogy $y(t) = e^t + C$, ahol $C \in \mathbb{R}$ tetszőleges konstans.

Általánosan megfogalmazva:

$$\dot{y}(t) = f(t), \quad (\text{integrálható KDE})$$

ahol f integrálható. A megoldás

$$y(t) = \int f(t) \, dt,$$

ami egy integrálást igényel. Minden egyszerűnek tűnik, de jó ha észben tartjuk, hogy "nem tudunk integrálni"! Mit is jelent ez pontosan? Vannak függvények, melyek primitív függvénye nem adható meg zárt alakban, ilyenek például a következő "ártatlannak" tűnő függvények:

$$f(t) = e^{-t^2} \quad \text{illetve} \quad f(t) = \frac{\sin t}{t}.$$

1.1.1. Példa. Fordítsuk most fizikára a szót. Megadjuk egy autó sebességét az idő függvényében $v(t) = 100 + \sin t$ km/h, vagyis nagyjából 100 km/h, de kicsit ingadozik körülötte. A kérdés, hogy mennyi utat tesz meg a $t = 0$ h időponttól a $t = 2\pi$ h időpontig. A feladatot a differenciálegyenletek nyelvére lefordítva:

$$\begin{cases} \dot{s}(t) = 100 + \sin t \\ s(0) = 0 \end{cases}$$

és a kérdés $s(2\pi)$ értéke. $s(t)$ -vel jelöltük a megtett utat és tudjuk, hogy $\dot{s}(t) = v(t)$, innen jön az első egyenlet, a második pedig az úgynevezett kezdeti feltétel, ami megmondja, hogy honnan indul a folyamat. Itt a jelentése, hogy a folyamat kezdetén 0 km-ről indulunk. A differenciálegyenlet és a kezdeti feladat együtt alkotják az úgynevezett kezdetiérték problémát.

Jelen esetben az egyenlet megoldása $s(t) = 100t - \cos t + C$, ahol $C \in \mathbb{R}$ tetszőleges konstans. A kezdeti érték kijelöli C értékét: $s(0) = 100 \cdot 0 - \cos 0 + C = C - 1 = 0$, tehát $C = 1$. Innen $s(2\pi) = 100 \cdot 2\pi - \cos 2\pi + 1 = 200\pi$ km. Ami – valljuk be – várható volt.

Szétválasztható típusú. Kicsit érdekesebb, ha az egyenlet a derivált mellett a keresett függvényt is tartalmazza, például

$$\dot{y}(t) = y(t). \quad (1.1)$$

Kis gondolkodás után rájöhethetünk, hogy ennek egy megoldása $y(t) = e^t$, majd arra is, hogy $y(t) = Ce^t$, ahol $C \in \mathbb{R}$ tetszőleges konstans, is megoldások. Más megoldás nincs, de ezt most még nem triviális látni.

Általánosan:

$$\dot{y}(t) = g(t)h(y(t)), \quad (\text{szétválasztható KDE})$$

ahol g, h folytonosak. A megoldás menete a következő:

- Ha $h(y_0) = 0$, akkor $y \equiv y_0$ a megoldás.

- Egyébként szétválasztjuk a változókat és integrálunk:

$$\dot{y}(t) = g(t)h(y(t)) \iff \frac{\dot{y}(t)}{h(y(t))} = g(t) \iff H(y(t)) = G(t) + C,$$

ahol $H' = 1/h$ és $G' = g$.

Vegyük észre, hogy a megoldás csak implicit alakban van megadva. Innen - elvileg - csak H inverzét kell alkalmazzuk és már ki is fejeztük a keresett függvényt. A valóságban ez az egyszerűnek tűnő lépés bizony problémákba ütközhet, lásd a 1.1.4. Példát.

1.1.2. Példa. Térjünk vissza az (1.1) kiindulási példa egy változatára!

$$\dot{y}(t) = ky(t). \quad (1.2)$$

Ez a legegyszerűbb populációdinamikai modell, az úgynevezett korlátlan növekedés modellje. Azon a feltevésen alapul, hogy a populáció növekedése – $\dot{y}(t)$ – egyenesen arányos a populáció nagyságával, ahol az arányossági tényező k . Ez egy nagyon idealizált modell, hiszen korlátlan táplálékot, és élőhelyet feltételez, illetve, hogy nincs interakció más fajokkal. Ennek ellenére, nem csak matematikailag érdekes, bizonyos baktériumfajok esetében, ha még kicsi a populáció, jó közelítést adhat.

Láthatjuk, hogy $y(t) \equiv 0$ megoldás, egyébként

$$\frac{\dot{y}(t)}{y(t)} = k$$

vagyis

$$\log |y(t)| = kt + c_1,$$

ahol c_1 , ahol $c_1 \in \mathbb{R}$ tetszőleges konstans. Ezt a lépést az Olvasó legegyszerűbben úgy ellenőrizheti le, ha visszafelé lép: a kapott egyenletet t szerint deriválva pont a kiindulási egyenletet kapja.

Az utóbbi egyenlőségből ki tudjuk fejezni $y(t)$ -t: $|y(t)| = e^{kt+c_1} = c_2 e^{kt}$, ahol $c_2 = e^{c_1}$, tehát tetszőleges pozitív konstans: $c_2 \in \mathbb{R}^+$. Elhagyva az abszolút értéket: $y(t) = c_3 e^{kt}$, ahol $c_3 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Ezt összevonva a konstans 0 megoldással kapjuk, hogy

$$y(t) = C e^{kt},$$

ahol $C \in \mathbb{R}$ tetszőleges konstans. A modell tehát exponenciális növekedést jósol.

Matlabbal a következőképp oldhatjuk meg az egyenletet:

```
syms k y(t)
eqn = diff(y,t) == k*y;
dsolve(eqn)
```

a válasz pedig:

```
ans =
C1*exp(k*t)
```

1.1.3. Példa. "Robbanás". Az

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = y^2(t) \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

kezdetiérték probléma még több érdekességet ígér a nemlineáris tagnak köszönhetően. Az azonosan 0 itt nem lehet megoldás a kezdetiérték miatt (csak az egyenletet figyelembe véve lehetne). Az egyenletet átrendezve, integrálva majd y -t kifejezve kapjuk, hogy $y(t) = -\frac{1}{t+C}$, ahol $C \in \mathbb{R}$ tetszőleges konstans. A kezdetiértéket figyelembe véve kapjuk, hogy

$$y(t) = \frac{1}{1-t}.$$

Vegyük észre, hogy a megoldást tudjuk értelmezni a $(-\infty, 1)$ intervallumon, de ennél bővebb halmazon nem! Vagyis, $t = 0$ -ból indulva a folyamat véges időben véget ér, a $t = 1$ -hez közelítve "felrobban".

Matlabbal a következőképp oldhatjuk meg az egyenletet:

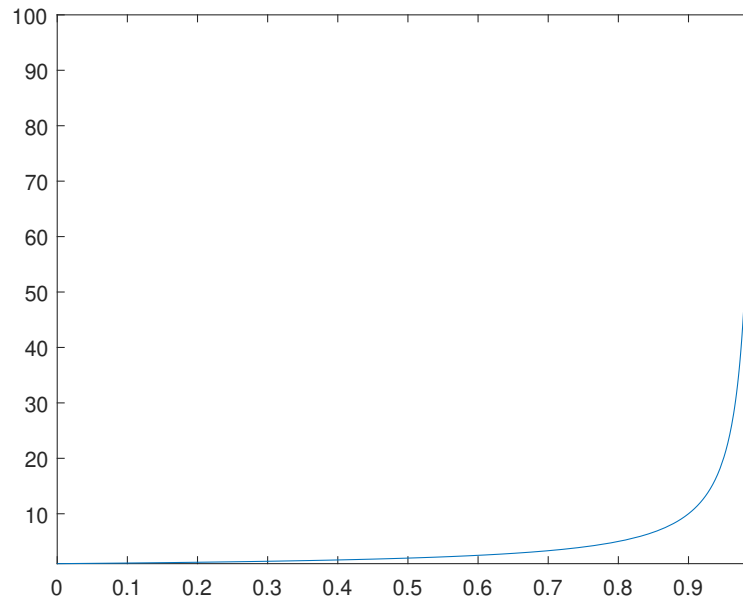
```
syms y(t)
eqn = diff(y,t) == y^2;
cond = y(0) == 1;
sol(t)=dsolve(eqn,cond)
fplot(sol,[0 0.99])
```

válaszként pedig a megoldás mellett ennek gráfját is ábrázoltuk:

```
sol(t) =
-1/(t - 1)
```

1.1.4. Példa. Más érdekességgel szolgál az egyébként ártalmatlannak tűnő

$$\dot{y}(t) = 1 - y^4(t)$$

1.1. ábra. $y(t) = \frac{1}{1-t}$ gráfja

egyenlet. Látható, hogy $y(t) \equiv 1$ és $y(t) \equiv -1$ megoldások, egyébként átrendezve: $\frac{\dot{y}(t)}{1-y^4(t)} = 1$. A bal oldalt parciális törtekre bontjuk:

$$\frac{\dot{y}(t)}{1-y^4(t)} = \dot{y}(t) \left(\frac{1}{4} \left(\frac{1}{1-y(t)} + \frac{1}{1+y(t)} \right) + \frac{1}{2} \frac{1}{1+y^2(t)} \right).$$

Majd integrálva:

$$\frac{1}{4} \log \left| \frac{1+y(t)}{1-y(t)} \right| + \frac{1}{2} \arctan t = t + C,$$

ahol $C \in \mathbb{R}$ tetszőleges konstans. A parciális törtekre bontás és integrálás időrabló lépések, de nem okoznak igazi problémát, hiszen ott, ahol nem várnánk, problémába ütközünk. Ez utóbbi alakból az ismeretlen függvény kifejezése kivitelezhetetlen, tehát a megoldást csak ebben az implicit alakban tudjuk megadni.

Leellenőrizhetjük, hogy a Matlab sem képes többre, mint mi:

```
syms y(t)
```

```
eqn = diff(y,t) == 1-y^4;
dsolve(eqn)
```

a figyelmeztetés mellett (a megoldást csak implicit alakban tudja megadni) a következő választ kapjuk:

```
ans =
solve(- atan(y) - atanh(y) == 2*C2 - 2*t, y)
      1
      -1
      1i
      -1i
```

Értelmezzük ezt a választ, illetve vegyük észre, hogy a Matlab a komplex konstans megoldásokat is listázta (hiszen nem adtuk meg, hogy valós megoldást keresünk)!

1.1.5. Példa. Eddigi példáinkban a $g(t)$ függvény csupán konstans volt. Lássunk most egy komplikáltabbat!

$$\dot{y}(t) = 2 \frac{y(t)}{\tan t}.$$

Látható, hogy $y(t) \equiv 0$ megoldás, egyébként átrendezve: $\frac{\dot{y}(t)}{y(t)} = 2 \frac{\cos t}{\sin t}$, majd integrálva:

$$\log |y(t)| = 2 \log |\sin t| + c_1,$$

ahol $c_1 \in \mathbb{R}$ tetszőleges konstans. A jobb oldalt át tudjuk alakítani: $2 \log |\sin t| + c_1 = \log c_2 \sin^2 t$, ahol $\log c_2 = c_1$, tehát $c_2 \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges konstans. Innen $|y(t)| = c_2 \sin^2 t$ majd elhagyva az abszolútértéket és összevonva az azonosan nulla megoldással:

$$y(t) = C \sin^2 t,$$

ahol $C \in \mathbb{R}$ tetszőleges konstans. Figyeljünk arra, hogy a megoldást nem tudjuk az egész számegyenesen értelmezni, hiszen az egyenlet nincs értelmezve minden t -re. Ez utóbbi részlet kidolgozását az Olvasóra bizzuk.

```
syms y(t)
eqn = diff(y,t) == 2*y/tan(t);
dsolve(eqn)
```

ans =
C3*sin(t)^2

Gyakorló feladatok:

1. Korlátos növekedés modellje.

$$\dot{y}(t) = ky(t) (C - y(t)) .$$

Ez a populációdinamikai modell már figyelembe veszi a környezet $C \in \mathbb{R}^+$ *eltartóképességét*. Oldjuk meg az egyenletet, majd számítsuk ki $\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t)$ értékét! Igazoljuk továbbá, hogy ha $0 \leq y(0) \leq C$, akkor $0 \leq y(t) \leq C$ teljesül $\forall t \in \mathbb{R}^+$.

2. Oldjuk meg a következő egyenleteket!

$$(a) \quad \dot{y}(t) = \frac{1}{y(t) (9 + 4t^2)} \quad (b) \quad \dot{y}(t) = (1 + y^2(t)) (1 + t^2)$$

$$(c) \quad \dot{y}(t) = \frac{-t^3}{(1 + y^2(t))^2} \quad (d) \quad \dot{y}(t) = y(t) (1 + y(t)) t$$

$$(e) \quad \dot{y}(t) = e^{-y(t)} \quad (f) \quad \dot{y}(t) = -y^2(t)$$

$$(g) \quad \dot{y}(t) = \frac{\sin t}{\cos t + 1} (e^{y(t)} + 1)$$

Elsőrendű lineáris típusú. Ha az előző paragrafus bevezető példáját kicsit megváltoztatjuk egy $\sin t$ hozzáadásával

$$\dot{y}(t) = y(t) + \sin t ,$$

akkor ez az egyenlet már nem szétválasztható, így az a megoldási módszer nem működik. Mutatunk egy megoldási módszert, amiről később megmutatjuk, hogy általánosan is működik.

1.1.6. Példa.

$$\dot{y}(t) = y(t) + \sin t.$$

Rendezzük át és szorozzunk be az egyenletet:

$$\dot{y}(t) - y(t) = \sin t \quad / \cdot e^{-t}$$

a ravaszság itt történt, ugyanis a bal oldal ügyesen átalakíthatóvá vált:

$$\dot{y}(t)e^{-t} + y(t)(-e^{-t}) = (y(t)e^{-t})' = e^{-t} \sin t$$

Ezt integrálva (a jobb oldalt kétszer parciálisan):

$$y(t)e^{-t} = -\frac{1}{2}e^{-t}(\sin t + \cos t) + C$$

Megjegyezzük, hogy számíthattunk volna határozott integrált, ahogy azt az általános esetben tesszük majd, de ennek akkor lenne jelentősége, ha kezdetiérték problémát oldanánk meg, vagyis $y(t_0)$ értéke adott lett volna. A befejező lépés:

$$y(t) = -\frac{1}{2}(\sin t + \cos t) + Ce^t.$$

Az Olvasóra bízunk annak ellenőrzését, hogy a Matlab által szolgáltatott megoldás (természetesen) ugyanaz, mint amit mi kaptunk.

```
syms y(t)
eqn = diff(y,t) == y+sin(t);
dsolve(eqn)

ans =
C1*exp(t) - (2^(1/2)*cos(t - pi/4))/2
```

Általánosan:

$$\dot{y}(t) = a(t)y(t) + b(t), \quad (\text{elsőrendű lineáris KDE})$$

ahol $a, b : I \rightarrow \mathbb{R}$ adott folytonos függvények az I intervallumon.

Kétféle megoldási módszert mutatunk, melyből az első a felvezető példában alkalmazott módszer általános esetben.

- I. "Beszorzásos trükk". Szorozzuk be az egyenletet $e^{-A(t)}$ -vel, ahol $\dot{A}(t) = a(t)$ és átrendezve kapjuk, hogy $e^{-A(t)}\dot{y}(t) + e^{-A(t)}(-a(t))y(t) = e^{-A(t)}b(t)$, ahol a bal oldal $(e^{-A(t)}y(t))'$. Integrálva t_0 -tól t -ig kapjuk, hogy $e^{-A(t)}y(t) - e^{-A(t_0)}y(t_0) = \int_{t_0}^t e^{-A(s)}b(s) ds$, vagyis

$$y(t) = e^{A(t)-A(t_0)}y(t_0) + \int_{t_0}^t e^{A(t)-A(s)}b(s) ds, \quad (\text{KVF})$$

a *konstans variációs formula*. Láthatjuk, hogy a megoldás menete két integrálást igényel. Habár a KVF megoldóképletet szolgáltat erre a típusra, nem javasoljuk, hogy az Olvasó rögtön ezt használja. Rengeteg lehetőség van eltévedni, pl. ha az egyenlet $\dot{y}(t) + a(t)y(t) = b(t)$ alakban van megadva, de ezt nem vesszük észre. A javaslatunk tehát az, hogy az Olvasó járja végig a megoldás útját és ha ez már természetessé válik számára, akkor észrevétlenül már a KVF-át is megjegyezte.

Érdemes lehet külön kitérni arra az esetre, amikor $a(t) \equiv a$ konstans. Ebben az esetben a KVF az

$$y(t) = e^{a(t-t_0)}y(t_0) + \int_{t_0}^t e^{a(t-s)}b(s) ds \quad (1.3)$$

alakra egyszerűsödik.

- II. A második megoldási módszer a "Homogén + partikuláris". Jelöljük y_H -val a homogén egyenlet megoldását, vagyis melyre $\dot{y}_H(t) = a(t)y_H(t)$. Ekkor $y_H(t) = Ce^{A(t)}$ adja az összes megoldást (az egyenlet szétválasztható volta miatt).

Ha ismernénk egy y_P partikuláris megoldását az (eredeti) egyenletnek, akkor az (eredeti) egyenlet összes megoldása $y = y_H + y_P$ alakú.

Egyrészt ezek megoldást szolgáltatnak, hiszen $\dot{y}(t) = \dot{y}_H(t) + \dot{y}_P(t) = a(t)y_H(t) + a(t)y_P(t) + b(t) = a(t)(y_H(t) + y_P(t)) + b(t) = a(t)y(t) + b(t)$.

Másrészt megkapjuk az összes megoldást, hiszen ha $x(t)$ egy megoldás, akkor $(x(t) - y_P(t))' = \dot{x}(t) - \dot{y}_P(t) = a(t)x(t) + b(t) - a(t)y_P(t) - b(t) = a(t)(x(t) - y_P(t))$, vagyis $x(t) - y_P(t)$ a homogén egyenlet egy megoldása. Tehát $x(t) - y_P(t) = y_H(t)$, mely átrendezve $x(t) = y_H(t) + y_P(t)$.

A kérdés az, hogy miképp tudunk előállítani egy $y_P(t)$ -t. Itt is két stratégiát mutatunk.

II.a $y_P(t) = C(t)e^{A(t)}$ alakban kereshető, és a C függvényre mindig egy integrálással megoldható differenciálegyenletet kapunk. Ez az állandó variálásának módszere.

II.b Ha az egyenlet állandó együtthatós, vagyis ha $a(t) \equiv a$, és $b(t)$ olyan típusú, hogy a deriváltja is ilyen típusú, akkor $y_P(t)$ -t kereshetjük $b(t)$ -hez "hasznló" alakban.

1.1.7. Példa. Szemléltessük a második módszert is az előző példán:

$$\dot{y}(t) = y(t) + \sin t.$$

- $y_H(t)$ előállítása: Az

$$\dot{y}_H(t) = y_H(t).$$

egyenletet kell megoldanunk, aminek tudjuk (lásd 1.1.2.Példa), hogy $y_H(t) = Ce^t$ a megoldása.

- a, $y_P(t)$ előállítása: A megoldást $y_P(t) = C(t)e^t$ alakban keressük, melyet visszahelyettesítünk az egyenletbe:

$$\dot{C}(t)e^t + C(t)e^t = C(t)e^t + \sin t$$

ahonnan $\dot{C}(t) = e^{-t} \sin t$, amit integrálva (kétszer parciálisan) kapjuk, hogy $C(t) = -\frac{1}{2}(\sin t + \cos t)e^{-t}$. A partikuláris megoldás, tehát $y_P(t) = -\frac{1}{2}(\sin t + \cos t)$.

- A befejező lépés.

$$y(t) = y_H(t) + y_P(t) = Ce^t - \frac{1}{2}(\sin t + \cos t).$$

Ez az út is két integrálást igényel, egyet a homogén megoldás előállításakor, egyet pedig $C(t)$ meghatározásakor. Tehát ugyanannyit, mint a beszorzásos trükk esetében. Ezt szeretnénk lecsökkenteni egy integrálásra. Miért is? Emlékezzünk vissza, hogy az integrálás a kellemetlen lépés, amit - ha csak lehet - szeretnénk elkerülni.

- b, Egyenletünk állandó együtthatós és az inhomogenitást okozó tag is „szép” így lehetőségünk van a partikuláris megoldást próbafüggvény módszerrel keresni. Tehát keressük a partikuláris megoldást

$$y_P(t) = A \sin t + B \cos t$$

alakban! Miért ilyen alakban? Látni fogjuk, hogy $A \sin t$ nem lenne elegendő. Olyan alakot kell használnunk, aminek deriváltja is ilyen alakú, illetve hasonlít a $\sin t$ függvényre.

Visszahelyettesítve az egyenletbe kapjuk, hogy $A \cos t - B \sin t = A \sin t + B \cos t + \sin t$. Vagyis:

$$(-1 - A - B) \sin t + (A - B) \cos t = 0.$$

Ez csak úgy lehetséges, ha

$$\begin{cases} -1 - A - B = 0 \\ A - B = 0 \end{cases}$$

(Miért is csak így? Ez annak a következménye, hogy a $\sin t$, $\cos t$ független rendszert alkot, lásd a lineáris algebra részt!) A lineáris egyenletrendszer megoldása $A = B = -\frac{1}{2}$, ahonnan kapjuk a már jól ismert partikuláris megoldást. A befejező lépés természetesen ugyanaz, mint az előző esetben. Mi a konklúzió? A kellemetlen integrálást lecseréltük egy lineáris egyenletrendszer megoldására, ami kétségkívül nyeremény.

1.1.8. Példa.

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = y(t) + e^t \\ y(1) = 0 \end{cases}$$

I. A beszorzásos trükkel:

$$\dot{y}(t) - y(t) = e^t \quad / \cdot e^{-t}$$

$$(y(t)e^{-t})' = \dot{y}(t)e^{-t} + y(t)(-e^{-t}) = 1$$

Integrálva

$$y(t)e^{-t} = t + C,$$

ahol $C \in \mathbb{R}$ tetszőleges konstans, vagyis a megoldás

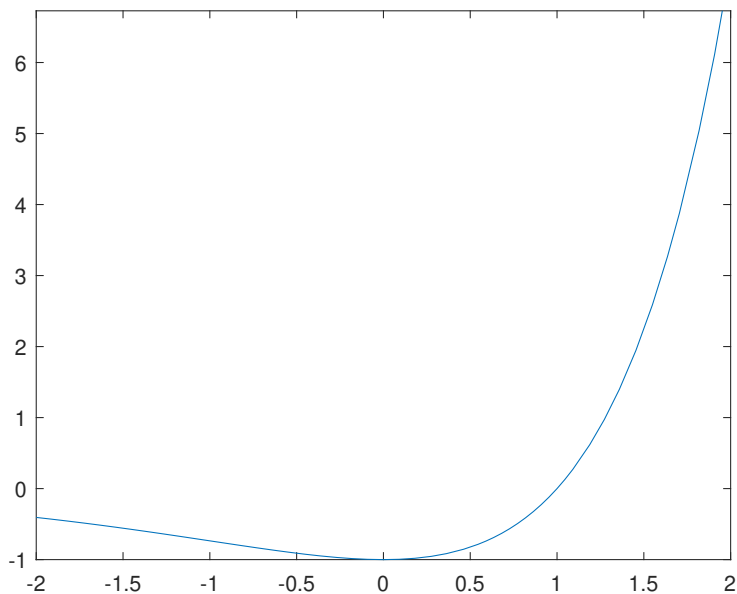
$$y(t) = te^t + Ce^t.$$

Utolsó lépésként felhasználjuk a kezdeti feltételt: $y(1) = 0 = 1 \cdot e + Ce = C$, vagyis $C = -1$, így

$$y(t) = te^t - e^t.$$

```
syms y(t)
eqn = diff(y,t) == y+exp(t);
cond = y(1) == 0;
sol(t)=dsolve(eqn,cond)
fplot(sol,[-2 2])
```

```
sol(t) =
t*exp(t) - exp(t)
```



1.2. ábra. $y(t) = te^t - e^t$ gráfja

II. A homogén + partikuláris módszerrel: Egyrészt a homogén megoldás $y_H(t) = Ce^t$.

Fontos: a kezdeti feltételt *nem* most használjuk fel a C konstans meghatározására, hiszen ez még nem az $y(t)$ megoldás, csak $y_H(t)$.

- II.a, A partikuláris megoldást keressük az állandó variálásának módszerével, vagyis $y_P(t) = C(t)e^t$. Ezt visszahelyettesítve, egyszerűsítés után kapjuk, hogy $\dot{C}(t) = 1$, vagyis egy jó $C(t)$ függvény például $C(t) = t$ (elég egy jó, hiszen egy $y_P(t)$ függvényt szeretnénk kapni). Ahonnan $y_P(t) = te^t$, majd a megoldás $y_H(t)$ és $y_P(t)$ összege. A konstans értékét ezután a kezdeti feltétel felhasználásával határozzuk meg.
- II.b, Az egyenlet állandó együtthatós és az inhomogenitást okozó tag is „szép” így a partikuláris megoldást kereshetjük a próbafüggvény módszerrel is. De legyünk óvatosak, ugyanis a kézenfekvő $y_P(t) = Ae^t$ választás nem vezet eredményre (az Olvasó helyettesítse vissza, hogy lássa, miért is nem), ez az úgynevezett rezonancia jelensége. A homogén megoldás és a gerjesztés ugyanolyan alakú, így ebben az esetben változtatnunk kell: $y_P(t) = Ate^t$. Ez a recept általánosan is működik: ha rezonancia van, szorozzunk t -vel.

A befejező lépéseket az Olvasóra bízunk.

1.1.9. Példa.

$$\dot{y}(t) = 3t^2y(t) + t^2$$

I. A beszorzásos trükkel:

$$\dot{y}(t) = 3t^2y(t) + t^2 \quad / \cdot e^{-t^3}$$

$$\dot{y}(t)e^{-t^3} + y(t)e^{-t^3}(-3t^2) = t^2e^{-t^3},$$

vagyis

$$\left(y(t)e^{-t^3}\right)' = t^2e^{-t^3},$$

integrálva

$$y(t)e^{-t^3} = \int t^2e^{-t^3} dt = -\frac{1}{3} \int e^{-t^3} (-3t^2) dt = -\frac{1}{3}e^{-t^3} + C$$

ahol $C \in \mathbb{R}$ tetszőleges konstans, vagyis a megoldás

$$y(t) = -\frac{1}{3} + Ce^{t^3}.$$

- II. A homogén + partikuláris módszerrel: A homogén rész szétválasztható, melynek megoldása $y_H(t) = Ce^{t^3}$.
- II.a, A partikuláris megoldást keressük az állandó variálásának módszerével, vagyis $y_P(t) = C(t)e^{t^3}$. Ezt visszahelyettesítve, egyszerűsítés után kapjuk, hogy $\dot{C}(t) = e^{-t^3}t^2$. Vegyük észre, hogy pontosan ezt az integrálást kellett korábban is elvégeznünk. $C(t) = -\frac{1}{3}e^{-t^3}$ (ahol az integrálási konstans önkényesen 0-nak választottuk). Innen $y_P(t) = -\frac{1}{3}$. A megoldást pedig a homogén és partikuláris megoldás összegeként kapjuk.
- II.b, Az egyenlet *nem* állandó együtthatós így a partikuláris megoldást *nem* kereshetjük a próbafüggvény módszerrel.

Viszont az Olvasó talán már gyanút fogott: az egyenlet tekinthető szétválaszthatónak is, ehhez csak a jobb oldalt kell kicsit átalakítanunk!

$$\dot{y}(t) = 3t^2y(t) + t^2 = t^2(3y(t) + 1).$$

A feladat szétválaszthatóként való megoldását az Olvasóra bízunk.

Gyakorló feladatok:

1. Oldjuk meg az alábbi feladatokat mind a beszorzásos trükkel, mind a homogén+partikuláris módszerrel, ahol a partikuláris megoldást keressük a próbafüggvény módszerrel! A (d) feladat esetében mutassunk egy másik megoldási módszert is (segítség: alkalmazzuk az $x(t) = y(t) - \sin t$ helyettesítést)!

$$(a1) \quad \dot{y}(t) - 2y(t) = 3e^t \quad (a2) \quad \dot{y}(t) - 2y(t) = 3e^{2t}$$

$$(b1) \quad \dot{y}(t) - 3y(t) = e^{3t} \sin t \quad (b2) \quad \dot{y}(t) - 3y(t) = e^{3t} + \sin t$$

$$(c1) \quad \dot{y}(t) - 3y(t) = e^{3t} + t \quad (c2) \quad \dot{y}(t) - 3y(t) = e^{3t}t$$

$$(d) \quad \dot{y}(t) = -2019(y(t) - \sin t) + \cos t$$

2. Oldjuk meg az alábbi nem konstans együtthatós egyenleteket! Használjuk mind a beszorzásos trükköt, mind a homogén + partikuláris módszert, ahol a partikuláris megoldást keressük az állandó variálásának módszerével (mivel a próbafüggvény módszert nem alkalmazhatjuk). A (c) feladat esetében vegyük észre, hogy besorolható egy másik típusba is, majd oldjuk meg azon módszerrel is.

$$(a) \quad t\dot{y}(t) = t + 2y(t) \quad (b) \quad \dot{y}(t) = \frac{y(t)}{t} + t^2 + 3t - 2$$

$$(c) \quad \dot{y}(t) - (\sin t)y(t) = \sin t$$

3. Mutassuk meg az alábbi kapcsolatot a két megoldási módszer között: $y_H(t) = Ce^{A(t)}$, ahol $C \in \mathbb{R}$ tetszőleges konstans, és $\dot{A}(t) = a(t)$. Tehát a beszorzásos trükk jó beszorzója pont $\frac{1}{y_H(t)}$.
4. Indokoljuk meg, hogy miért nem alkalmazható a próbafüggvény módszer a partikuláris megoldás előállítására, ha az egyenlet nem állandó együtthatós, illetve ha a gerjesztés nem "szép", ahol definiáljuk, hogy mit is jelent, hogy szép!
5. Tekintsük az (1.3) formulát a $t_0 = 0$ speciális esetben. Mutassuk meg, hogy ekkor az integráltként szimmetrikus a következő értelemben:

$$\int_0^t e^{a(t-s)} b(s) \, ds = \int_0^t e^{as} b(t-s) \, ds.$$

Bernoulli típusú.

$$\dot{y}(t) = a(t)y(t) + b(t)y^\alpha(t) \quad (\text{BERNOULLI-TÍPUSÚ KDE})$$

ahol $a, b : I \rightarrow \mathbb{R}$ adott folytonos függvények az I intervallumon és $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ adott.

A megoldás receptje a következő: először leellenőrizzük, hogy az $y(t) \equiv 0$ megoldás-e. Ezután, az $x(t) = y^{1-\alpha}(t)$ helyettesítéssel elsőrendű lineáris KDE-et kapunk, amivel már tudunk bánni.

1.1.10. Példa.

$$\dot{y}(t) + 2y(t) = y^2(t)e^t$$

Első lépésként vegyük észre, hogy $y(t) \equiv 0$ megoldás. Ezután alkalmazzuk az $x(t) = y^{1-\alpha}(t)$ helyettesítést, ahol $\alpha = 2$, vagyis

$$x(t) = y^{-1}(t) = \frac{1}{y(t)}, \quad \dot{x}(t) = -y^{-2}(t)\dot{y}(t) = -\frac{\dot{y}(t)}{y^2(t)}.$$

Az egyenletet leosztva $y^2(t)$ -vel (az $y(t) \equiv 0$ megoldást már megtaláltuk) kapjuk, hogy

$$\frac{\dot{y}(t)}{y^2(t)} + \frac{2}{y(t)} = e^t,$$

vagyis

$$-\dot{x}(t) + 2x(t) = e^t,$$

ami már lineáris KDE. Szorozzunk -1 -el és alkalmazzuk a beszorzósos trükköt!

$$\dot{x}(t) - 2x(t) = -e^t \quad / \cdot e^{-2t}$$

$$\dot{x}(t)e^{-2t} + x(t)e^{-2t}(-2) = (x(t)e^{-2t})' = -e^t e^{-2t} = -e^{-t},$$

integrálva, majd beszorozva e^{2t} -vel

$$x(t) = e^t + Ce^{2t},$$

ahol $C \in \mathbb{R}$ tetszőleges konstans, vagyis a megoldások: egyrészt $y(t) \equiv 0$, továbbá

$$y(t) = \frac{1}{x(t)} = \frac{1}{e^t + Ce^{2t}}.$$

A Matlab kicsit más formában, de ugyanezt az eredményt adja:

```
syms y(t)
eqn = diff(y,t) + 2*y == y^2*exp(t);
dsolve(eqn)
```

```
ans =
0
exp(-2*t)/(C1 + exp(-t))
```

Gyakorló feladatok:

1.

$$y'(t) - y(t) = \frac{t}{y(t)}$$

2.

$$t\dot{y}(t) - 2t^2\sqrt{y(t)} = 4y(t)$$

1.1.2. Modellezés elsőrendű differenciálegyenletekkel

1.1.11. Példa. Az üres vödör problémája.

A következő feltevésekkel élünk: a vödör henger alakú, melynek alapköre A területű. A rajta található lyuk területe pedig a . $h(t)$ -vel jelöljük a vödörben levő folyadék magasságát és $v(t)$ -vel jelöljük a kiáramló folyadék sebességét. Ekkor a következő egyenleteket írhatjuk fel:

$$\dot{h}(t)A = v(t)a \quad (\text{Térfogatomegmaradás})$$

ahol feltettük, hogy a folyadék összenyomhatatlan. Továbbá

$$mgh(t) = \frac{1}{2}mv^2(t) \quad (\text{Energiamegmaradás})$$

Kombinálva a kettőt kapjuk, hogy

$$\dot{h}(t) = -2c\sqrt{h(t)},$$

ahol a konstans $2c = \frac{a}{A}\sqrt{2g}$. $h(t)$ csökkenését a negatív előjellel vettük figyelembe. A megoldás

$$h(t) = \begin{cases} (-ct + b)^2 & , \text{ ha } t \leq \frac{b}{c} \\ 0 & , \text{ ha } t > \frac{b}{c} \end{cases}$$

A problémának van egy figyelemreméltó tulajdonsága: időben visszafelé haladva nem egyértelmű a megoldás! Mit is jelent ez? Ha a vödör üres, nem tudjuk megmondani, hogy mi is történt a múltban. Mikor ürült ki, vagy lehet, hogy egyáltalán nem volt benne soha folyadék?!

1.1.12. Példa. Ciolkovszkij rakéta-egyenlete.

$$F(t) = \dot{I}(t) \quad (\text{Newton 2. törvénye})$$

Speciális esetek:

- Ha $m(t) \equiv m$, akkor $\dot{I}(t) = m\dot{v}(t) = ma(t)$.
- Ha zárt a rendszer, akkor $F(t) \equiv 0$, vagyis

$$I(t) \equiv c \quad (\text{Impulzusmegmaradás})$$

Az egyenlet elkészítésében a terv: $t \rightarrow t + \Delta t$ kis időtartam alatt történő változások vizsgálata, majd $\Delta t \rightarrow 0$ határértéket képzünk.

Alkalmazzuk a következő jelöléseket.

- A t időpontban: a rakéta tömege: $m(t)$, míg a rakéta sebessége: $v(t)$.
- A $t + \Delta t$ időpontban: a rakéta tömege: $m(t + \Delta t)$, a rakéta sebessége pedig: $v(t + \Delta t)$. A felhasznált üzemanyag tömege: Δm , és relatív sebessége (visszafelé a rakétához viszonyítva): c .

Ekkor a következő összefüggéseket írhatjuk fel:

$$m(t) = m(t + \Delta t) + \Delta m \quad (\text{Tömegmegmaradás})$$

$$m(t)v(t) = m(t + \Delta t)v(t + \Delta t) + \Delta m(v(t + \Delta t) - c) \quad (\text{Impulzusmegmaradás})$$

Vagyis

$$m(t) \frac{v(t + \Delta t) - v(t)}{\Delta t} = -c \frac{m(t + \Delta t) - m(t)}{\Delta t}$$

$$m(t)\dot{v}(t) = -c\dot{m}(t)$$

Ha a rakéta maximálisan elérhető sebessége a kérdés (ez ugyanis egy jó mérőszám arra vonatkozólag, hogy milyen jó a rakétánk), akkor vegyük észre, hogy ezt a sebességet akkor éri el a rakéta, ha minden üzemanyagot felhasznált már. Jelöljük azt az időpontot, mikor kiürült az üzemanyagtartály T -vel. Integráljunk:

$$\int_0^T \dot{v}(t) dt = -c \int_0^T \frac{\dot{m}(t)}{m(t)} dt$$

$$v(T) = v(0) + c \log \frac{m(0)}{m(T)} = v(0) + c \log \left(1 + \frac{m_{\text{üzemanyag}}}{m_{\text{raketa}}} \right),$$

ahol $v(0)$ a rakéta kezdeti sebessége, míg c a rakéta hajtóművének paramétere. Ha minél nagyobb sebességet akarunk elérni, akkor ez egyrészt c értékétől függ, minél nagyobb, annál jobb, másrészt a $\frac{m_{\text{üzemanyag}}}{m_{\text{raketa}}}$ hányadostól. Ez minél nagyobb, annál jobb. Ez magyarázza a rakéták elsőre furcsának tűnő tulajdonságát, hogy a hasznos rész, ahol az űrhajósok és a rakomány van, elég kicsi összehasonlítva az üzemanyagtartállyal.

1.1.13. Példa. Oldat.

Egy tartály 100 l vízből és 10 kg sóból álló oldatot tartalmaz. Víz folyik a tartályba 5 l/perc sebességgel (feltételezzük, hogy ez rögtön elkeveredik az oldattal), míg az oldat ugyanilyen sebességgel hagyja el a tartályt az alul lévő nyíláson. Mennyi sót fog tartalmazni a tartály 1 óra múlva?

Jelölések: $M(t)$ jelöli a tartályban levő só mennyiségét. A terv a szokásos: $M(t) \rightarrow M(t + \Delta t)$ közti átmenet vizsgálata, majd határérték. Válasszuk szét a folyamatot két lépésre: "be" és "ki" lépésekre. Ez azt jelenti, hogy míg a valóságban a víz befolyása és a keverék kifolyása párhuzamosan történik, addig mi ezt két lépésben modellezzük, hogy egyszerűsítsük az egyenlet felírását. Reményeink szerint ez a szétválasztás nem jelent különbséget, ha $\Delta t \rightarrow 0$.

Kezdjük a "ki" lépéssel, amikor csak keverék folyik ki és nincs vízbefolyás:

$$\tilde{M} = M(t) - \frac{M(t)}{100} 5\Delta t \quad (\text{"ki"})$$

majd jön a "be" lépés, amikor csak víz folyik be és nincs keverék kifolyás:

$$M(t + \Delta t) = \tilde{M} \quad (\text{"be"})$$

Vagyis

$$M(t + \Delta t) = M(t) - \frac{M(t)}{100} 5\Delta t,$$

ahol $\tilde{M}$ a köztes értéket jelöli. Így alábecsüljük M valós értékét (Miért?).

$$\frac{M(t + \Delta t) - M(t)}{\Delta t} = -\frac{M(t)}{20}$$

Vegyünk határértéket: $\Delta t \rightarrow 0$, ekkor megkapjuk a differenciálegyenletet, ami a folyamatot modellezi

$$\dot{M}(t) = -\frac{M(t)}{20}. \quad (1.4)$$

A megoldás $M(t) = c e^{-\frac{1}{20}t}$, majd felhasználva az $M(0) = 10$ kezdeti feltételt kapjuk, hogy $M(60) = 10 e^{-3}$ kg. Figyeljünk a megfelelő mértékegységek használatára!

```
syms y(t)
eqn = diff(y,t) == -y/20;
cond = y(0) == 10;
sol(t)=dsolve(eqn,cond)
sol(60)
fplot(sol,[0 60])
```

```
sol(t) =
10*exp(-t/20)
ans =
10*exp(-3)
```

A végeredmény majdnem $\frac{1}{2}$:

```
10*exp(-3)
```

```
ans =
0.4979
```

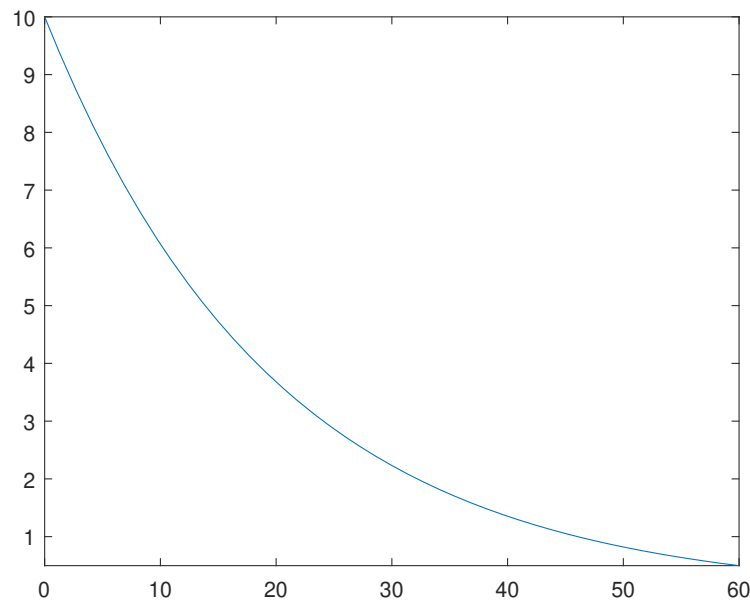
A kérdés már csak az, hogy bízhatuk-e egy olyan modellben, amit (alá)becslésekkel kaptunk? Az egyenlőségjelek a konstrukció folyamán nem is voltak igazi egyenlőségjelek. De azt, hogy vajon maga a differenciálegyenlet jó-e, módunkban áll eldönteni. Most végig felülbecsléseket alkalmazunk: kezdjük azzal, hogy megfordítjuk a lépéseket és először befolyik a víz (ezzel csökkentjük a koncentrációt, tehát a kifolyó keverék kevesebb sót fog tartalmazni), másrészt tudva, hogy a só mennyisége csökken, így $M(t) > M(t + \Delta t)$ tovább tudunk növelni, ha a kifolyásnál ezt a kisebb értéket használjuk:

$$\tilde{M}(t + \Delta t) = M(t) \quad (\text{"be"})$$

$$M(t + \Delta t) = \tilde{M} - \frac{M(t + \Delta t)}{100 + 5\Delta t} 5\Delta t \quad (\text{"ki"})$$

Összevonva és átalakítva kapjuk, hogy

$$\frac{M(t + \Delta t) - M(t)}{\Delta t} = -\frac{M(t)}{20 + 2\Delta t}$$

1.3. ábra. $M(t) = 10e^{-\frac{1}{20}t}$ gráfja

majd határértéket véve ugyanazt a differenciálegyenletet kapjuk, mint az alábecslés esetében (1.4). Ez azt jelenti, hogy az eljárásuk korrekt volt, a kapott differenciálegyenlet - a feltett feltételek mellett - jól írja le a folyamatot.

Az már egy következő kérdés, hogy a feltételek mennyire tekinthetők életszerűnek. A keveredés biztos, hogy nem történik meg azonnal, tehát a tartályban nem feltételezhetünk térben azonos koncentrációt. A befolyási pontnál alacsonyabb, míg a kifolyási pontnál magasabb a koncentráció, mint az átlag. A kérdés az, hogy ez az eltérés elhanyagolható-e? Ez függhet a tartály nagyságától, alakjától, a befolyási és kifolyási pont helyzetétől és magától a folyadéktól is. Ha figyelembe akarjuk venni, hogy a kifolyási koncentráció "késésben van" az átlagos koncentrációhoz képest, akkor ezt megpróbálhatjuk *késleltetett differenciálegyenlet*tel modellezni:

$$\dot{M}(t) = -\frac{M(t - \tau)}{20},$$

ahol τ a késés.

1.1.14. Példa. Lekvár.

Kiraktunk hűlni egy adag éppen elkészült - és így $100\text{ }^{\circ}\text{C}$ hőmérsékletű - lekvárt a levegőre. A levegő hőmérsékletét állandó $20\text{ }^{\circ}\text{C}$ tekintjük. 10 órakor a lekvár $30\text{ }^{\circ}\text{C}$ -os, míg 11 órakor már csak $25\text{ }^{\circ}\text{C}$ -os. Mikor raktuk ki hűlni a lekvárt? (Tudjuk, hogy a lehűlés sebessége egyenesen arányos a lekvár a levegő hőmérsékletkülönbségével.)

Jelöljük $T(t)$ -vel a lekvár hőmérsékletét a t időpontban. Ekkor, $T(10) = 30$, $T(11) = 25$. A kérdés pedig az a t időpont, amire $T(t) = 100$. A Lehűlést az alábbi differenciálegyenlet írja le:

$$\dot{T}(t) = k(T(t) - 20), \quad (\text{Lehűlési törvény})$$

mely szétválasztható típusú. A megoldás: $T(t) = 20 + ce^{kt}$. A konstansokat a két mérési adat felhasználásával tudjuk kiszámolni, de ha ügyesen járunk el, akkor c értékét nem is szükséges meghatározni. Kapjuk, hogy $e^k = \frac{1}{2}$, majd ezt felhasználva: $t = 7$. Vagyis a válasz az, hogy 7 órakor raktuk ki hűlni a lekvárt.

1.1.15. Példa. Motorcsónak.

A motorcsónak sebessége 5 m/s . 40 másodperccel azután, hogy kikapcsoltuk a motort a sebesség 2 m/s -ra csökkent. Mi volt a motorcsónak sebessége 2 másodperccel azután, hogy kikapcsoltuk a motort? Feltesszük, hogy a súrlódási erő egyenesen arányos a sebességgel.

Jelöljük $v(t)$ -vel a motorcsónak sebességét a t időpontban. Tudjuk, hogy $v(0) = 5$, $v(40) = 2$. A kérdés: $v(2)$ értéke. A súrlódási erőre a következő érvényes: $F(t) = m\dot{v}(t) \sim v(t)$, vagyis

$$m\dot{v}(t) = kv(t)$$

mely szétválasztható típusú. A megoldás: $v(t) = ce^{\frac{k}{m}t}$. Felhasználva az adatokat kapjuk, hogy $v(2) = 5 \left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{1}{20}} \approx 4.7761\text{ m/s}$.

1.1.16. Példa. Rádium.

A rádium bomlási sebessége egyenesen arányos a mennyiségével. A rádium felezési ideje 1590 év. Hány százaléka marad meg a rádiumnak 100 év múlva?

Ha $M(t)$ -vel jelöljük a rádium mennyiségét a t időpontban, akkor a felezési időre vonatkozó információ: $\frac{1}{2}M(0) = M(1590)$. A kérdés pedig: $\frac{M(100)}{M(0)} = ?$

A törvény: $\dot{M}(t) \sim M(t)$, vagyis

$$\dot{M}(t) = kM(t)$$

mely szétválasztható típusú. A megoldás: $M(t) = ce^{kt}$. Felhasználva az adatokat kapjuk, hogy $\frac{M(100)}{M(0)} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{100}{1590}}$. Tehát $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{100}{1590}} \cdot 100\%$.

1.1.17. Példa. A gonosz manó.

A kis hangya egy 10 cm hosszú gumiszalag jobb végpontjából 1 cm/s sebességgel indul el a szalag rögzített bal végpontja felé. A gonosz manó ezzel egyidejűleg a szalag jobb végpontját 100 cm/s sebességgel húzza hátra. Eljut-e valamikor a hangya a szalag másik végére, és ha igen, mikor?

Vezessük be a következő jelöléseket: $x(t)$ jelölje a hangya távolságát a bal végponttól a t időpontban, ekkor $x(0) = 10$ (cm), és a kérdés az, hogy mely t értékre igaz, hogy $x(t) = 0$ (cm). Hasonlóan járunk el, mint az oldatos 1.1.13. Példa esetében.

$$\frac{\tilde{x}(t + \Delta t)}{l(t + \Delta t)} = \frac{x(t)}{l(t)}, \quad (\text{"manó"})$$

ahol $l(t) = 10 + 100t$ jelöli a gumiszalag hosszát a t időpontban.

$$x(t + \Delta t) = \tilde{x}(t + \Delta t) - \Delta t \quad (\text{"hangya"})$$

Vagyis összevonva, képezve a különbségi hányadost, majd határértéket véve kapjuk, hogy

$$\dot{x}(t) = \frac{10}{1 + 10t}x(t) - 1,$$

amely egy elsőrendű lineáris differenciálegyenlet. Mivel nem állandó együtthatós, a beszorzós trükköt választjuk megoldási módszernek:

$$\left(x(t) \frac{1}{1 + 10t}\right)' = -\frac{1}{1 + 10t},$$

ahonnan

$$x(t) = (1 + 10t) \left(-\frac{1}{10} \log(1 + 10t) + c\right),$$

a konstans értékét pedig a kezdeti feltételből tudjuk meghatározni: $c = 10$. Ez azt jelenti, hogy a

$$0 = (1 + 10t) \left(-\frac{1}{10} \log(1 + 10t) + 10\right)$$

egyenlet megoldását keressük. Ez egyszerűen meghatározható: $t = \frac{e^{100} - 1}{10}$ (s). Tehát, (elvileg) a hangya "hazaér", még ha az ehhez szükséges idő több is, mint az univerzum keletkezése óta eltelt idő!

1.1.18. Példa. Vízcsepp.

A gömb alakú vízcsepp a felszínével arányos sebességgel párolog el (tehát a csepp átmérőjének csökkenése egyenesen arányos a csepp felszínével). Határozzuk meg a vízcsepp sugarát az idő függvényében!

Jelöljük a vízcsepp sugarát a t időpontban $r(t)$ -vel, az átmérőjét $d(t)$ -vel, a felszínét pedig $A(t)$ -vel. Ekkor a párolgási szabály azt mondja, hogy $\dot{r}(t) \sim \dot{d}(t) \sim A(t) \sim r^2(t)$, vagyis

$$\dot{r}(t) = kr^2(t), \quad (1.5)$$

Mely szétválasztható típusú, a megoldás $r(t) = \frac{R_0}{1 - R_0 kt}$.

Az egyenlet nagyon hasonlít a 1.1.3. Példához, mely a (1.5) egyenlet $k = 1$ speciális esete. A megoldás mégsem robban fel, sőt csökken. Ennek az oka, hogy $k < 0$.

1.2. Másodrendű differenciálegyenletek

1.2.1. Másodrendű lineáris differenciálegyenletek

1.2.1. Példa. Tekintsünk egy, az egyik végével a plafonra rögzített rugót, melynek másik végére egy m tömegű testet rögzítünk. A nyugalmi helyzetéhez képest egy egységnyit meghúzzuk és elengedjük. Milyen függvény írja le a tömeg kitérését?

Newton 2. törvénye

$$F(t) = \dot{I}(t)$$

már korábban is előkerült a rakétás feladatnál. Itt a tömeg állandó, így az $F(t) = m\ddot{x}(t)$ alakot használhatjuk, ahol $x(t)$ a kitérés adja meg az idő függvényében, a nyugalmi pozíciót 0-nak véve. Másrésről ha feltesszük, hogy a rugó visszatérítési ereje egyenesen arányos a kitéréssel, akkor $F(t) = -kx(t)$, ahol a $k > 0$ a rugóra jellemző állandó, a $-$ pedig azért szükséges, mert a kitéréssel ellentétes irányba hat az erő. Feltételezve, hogy nincs más erő, ennek a kettőnek egyenlőnek kell lennie:

$$m\ddot{x}(t) = -kx(t). \quad (1.6)$$

Ez egy közönséges másodrendű lineáris differenciálegyenlet. Kis gondolkodás után az Olvasó rájőhet, hogy mind $x_1(t) = \cos \sqrt{\frac{k}{m}}t$, mind $x_2(t) = \sin \sqrt{\frac{k}{m}}t$ kielégíti az (1.6) egyenletet. Még egy kis gondolkodás után rájőhetünk, hogy ezen két függvény tetszőleges lineáris kombinációja is megoldás:

$$x(t) = c_1 \cos \sqrt{\frac{k}{m}}t + c_2 \sin \sqrt{\frac{k}{m}}t, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Az egy jó kérdés, hogy vajon megtaláltuk-e az összes megoldást. A válasz igen, de ezt csak később fogjuk igazolni, most beérjük azzal, hogy a Matlab is hasonló eredményre jut:

```
syms x(t) m k
eqn = m*diff(x,t,2)+k*x == 0;
dsolve(eqn)

ans =
C1*exp((t*(-k*m)^(1/2))/m) + C2*exp(-(t*(-k*m)^(1/2))/m)
```

A Matlab megoldása kicsit zavarbaejtő lehet. Igazoljuk, hogy a mi általunk kapott megoldás és a Matlab által szolgáltatott megoldás megegyeznek! Mindenesetre, ha $m = k = 1$ értékeket adunk meg, akkor

```
syms x(t)
eqn = diff(x,t,2)+x == 0;
dsolve(eqn)

ans =
C3*cos(t) + C4*sin(t)
```

a Matlab is az általunk preferált alakot szolgáltatja.

A feladatunk kezdetiérték probléma, hiszen megadtuk, hogy $x(0) = -1$ és - bár nem hangsúlyoztuk - $\dot{x}(0) = 0$. Ezen feltételek mellett a megoldás:

$x(t) = -\cos \sqrt{\frac{k}{m}}t$, melyet a Matlab is megtalál:

```
syms x(t) m k
eqn = m*diff(x,t,2)+k*x == 0;
```

```
Dx = diff(x,t);
cond = [x(0)==-1, Dx(0)==0];
sol=dsolve(eqn,cond)
simplify(sol)
```

```
sol =
- exp((t*(-k*m)^(1/2))/m)/2 - exp(-(t*(-k*m)^(1/2))/m)/2
ans =
-cos((k^(1/2)*t)/m^(1/2))
```

Megjegyezzük, hogy a rugó visszaállító erejére tett feltevés a legtöbb esetben egyszerűsítés. A valóságban ez inkább $F(t) = -k \operatorname{sign}(x(t)) |x(t)|^\alpha$, ahol $0 < \alpha < 1$.

Tekintsük a közönséges másodrendű lineáris differenciálegyenleteket:

$$\ddot{y}(t) + p(t)\dot{y}(t) + q(t)y(t) = f(t), \quad (1.7)$$

ahol $p, q, f : I \rightarrow \mathbb{R}$ adott folytonos függvények. A célunk az, hogy eljárást adjuk a megoldás előállítására.

Homogénnek nevezzük az egyenletet, ha $f \equiv 0$, egyébként inhomogénnek.

Hasonlóan az elsőrendű lineáris típushoz, a megoldás itt is előáll "homogén + partikuláris" alakban: (1.7) minden megoldása

$$y(t) = y_p(t) + y_h(t)$$

alakú, ahol y_p egy megoldása (1.7)-nek, ezt *partikuláris megoldás*nak nevezzük, míg y_h az úgynevezett (általános) *homogén megoldás*, vagyis az általános megoldása annak az

$$\ddot{y}(t) + p(t)\dot{y}(t) + q(t)y(t) = 0 \quad (1.8)$$

egyenletnek, amit az eredetiből úgy képezünk, hogy f -et 0-ávé változtatjuk.

Ennek igazolását az Olvasóra bízuk, csak annyit jegyzünk meg, hogy teljesen ugyanúgy megy, mint az elsőrendű lineáris esetben. Ez az állítás receptet ad a megoldás előállítására:

1. Keressük meg a megfelelő homogén egyenlet összes megoldását.
2. Keressünk egy partikuláris megoldást.
3. Adjuk össze őket.

Vizsgáljuk meg részletesebben a recept pontjait!

1. Az általános homogén megoldás alakja a következő:

$$y_h(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t),$$

ahol y_1 és y_2 két független megoldása a megfelelő homogén egyenletnek,
 $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Ezen állítással kapcsolatban teszünk néhány észrevételt.

- Függvények függetlensége hasonlóan értelmezhető, mint vektorok függetlensége, lásd a vektorterek fejezetet!
- Ha y_1 és y_2 megoldások, akkor a lineáris kombinációjuk is megoldás. Ez az egyszerű rész, az Olvasónak nem okozhat gondot ennek belátása.
- A megoldás alakja azt jelenti, hogy vennünk kell az összes lineáris kombinációját y_1 és y_2 -nek. Vagyis a kapott megoldáshalmaz egy 2 dimenziós altér az I intervallumon értelmezett folytonosan differenciálható függvények terében. A bizonyítás nehezebb része annak belátása, hogy 2 dimenzió elegendő. Erre akkor tudunk majd egyszerű indoklást adni, amikor egyváltozós magasabbrendű egyenletek és elsőrendű többváltozós rendszerek között tudunk kapcsolatot teremteni (Cauchy-féle átírás).
- Az általános homogén megoldás alakját tehát ismerjük, már csak annyi hiányzik, hogy előállítsunk két független megoldást. A rossz hír most következik: általános esetben erre nincs recept! Ez nem érheti nagyon váratlanul az embert, már az elsőrendűeknél is lépten-nyomon belebotlottunk ebbe a problémába. Másodrendűeknél már a lineáris homogén eset is "megoldhatatlan", legalábbis az általános esetben. A jó hír az, hogy vannak esetek, amikor tudjuk, hogyan kell előállítani a két független megoldást. A továbbiakban ezeket az eseteket vizsgáljuk.

Elsőnek a "szerencsés tipp" módszerét ismertetjük.

- 1.a Ha ismernénk egy y_1 -et, akkor y_2 -őt az $y_2(t) = y_1(t)z(t)$ alakban érdemes keresni, ugyanis ezt visszahelyettesítve egy elsőrendű közönséges differenciálegyenletet kapunk $\dot{z}(t)$ -re.

Az elnevezés onnan származik, hogy y_1 -et valamilyen célzott tippel próbáljuk meghatározni, pl. polinom, exponenciális, vagy trigonometrikus függvény alakban keresve. Az állítás igazolását az Olvasóra bízuk, hiszen csak egy visszahelyettesítést és némi átalakítást igényel.

1.2.2. Példa.

$$(t^2 + 1) \ddot{y}(t) - 2t\dot{y}(t) + 2y(t) = 0$$

Használjuk a szerencsés tipp módszert! Kis gondolkodás után rájöhettünk, hogy $y_1(t) = t$ egy megoldás.

A megadott recept szerint keressük a másik megoldást $y_2(t) = tz(t)$ alakban! Ekkor $\dot{y}_2(t) = z(t) + t\dot{z}(t)$, illetve $\ddot{y}_2(t) = 2\dot{z}(t) + t\ddot{z}(t)$. Visszahelyettesítve és egyszerűsítve kapjuk, hogy

$$t(t^2 + 1)\ddot{z}(t) + 2\dot{z}(t) = 0.$$

Bevezetve a $v(t) = \dot{z}(t)$ jelölést egy szétválasztható típusú egyenletet kapunk. Csak a főbb lépéseket adjuk meg a továbbiakban, a részletek kidolgozását az Olvasóra bízunk.

$$\dot{v}(t) = \frac{-2}{t(t^2 + 1)}v(t) = \left(-\frac{2}{t} + \frac{2t}{t^2 + 1}\right)v(t),$$

ahonnan $v(t) = C\frac{t^2}{t^2 + 1}$, vagyis $z(t) = C\left(t - \frac{1}{t}\right)$. Egy további (az $y_1(t) = t$ -től független) megoldást keresünk, így megválaszthatjuk C értékét, például legyen $C = 1$ (bármely 0-tól különböző érték megfelelő, az Olvasó gondolja meg, hogy miért!), vagyis

$$y_2(t) = t^2 - 1.$$

Az általános megoldás pedig

$$y(t) = c_1 t + c_2 (t^2 - 1),$$

ahol $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ tetszőleges konstansok.

Ennek a feladatnak a megoldására a Matlab is képes:

```
syms y(t)
eqn = (t^2+1)*diff(y,t,2)-2*t*diff(y,t,1)+2*y == 0;
dsolve(eqn)

ans =
C1*t + C2*t*(t - 1/t)
```

A szerencsés tipp módszer sajnos ritkán működik – a neve is sugallja – kell hozzá egy adag szerencse. A továbbiakban a legegyszerűbb - ugyanakkor fontos - esetet tárgyaljuk, ahol a független megoldások előállítására van recept. Ez az, amikor az együtthatók konstansok.

1.b Tekintsük a következő egyenletet:

$$\ddot{y}(t) + p\dot{y}(t) + qy(t) = 0, \quad (1.9)$$

ahol $p, q \in \mathbb{R}$. Ekkor a két független megoldást az úgynevezett *karakterisztikus polinom*

$$\lambda^2 + p\lambda + q \quad (1.10)$$

gyökei segítségével fejezhetjük ki:

- $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}, \lambda_1 \neq \lambda_2$ esetében: $y_1(t) = e^{\lambda_1 t}, y_2(t) = e^{\lambda_2 t}$
- $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}, \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ esetében: $y_1(t) = e^{\lambda t}, y_2(t) = te^{\lambda t}$
- $\lambda_1 = \alpha + \beta i, \lambda_2 = \alpha - \beta i$ esetében: $y_1(t) = e^{\alpha t} \cos \beta t, y_2(t) = e^{\alpha t} \sin \beta t$.

Vizsgáljuk meg, hogy miért is működik ez a módszer! Helyettesítsünk $y(t) = e^{\lambda t}$ -t az (1.9) egyenletbe. Ekkor egyszerűsítés után az $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$ egyenletet kapjuk!

Ha ennek két különböző valós gyöke van, vagyis ha a diszkrimináns pozitív, akkor már meg is találtuk a két független megoldást.

Ha a diszkrimináns 0, akkor $q = \left(\frac{p}{2}\right)^2$. Ekkor $y_1(t) = e^{-\frac{p}{2}t}$ természetesen megoldás, de egy másik független megoldásra is szükség van: könnyű leellenőrizni, hogy $y_2(t) = te^{-\frac{p}{2}t}$ is megoldása az

$$\ddot{y}(t) + p\dot{y}(t) + \left(\frac{p}{2}\right)^2 y(t) = 0$$

egyenletnek. A két megoldás pedig független rendszert alkot.

A harmadik eset hordoz némi érdekességet. Az egyszerű indoklás úgy hangzik, hogy leellenőrizhetjük visszahelyettesítéssel. De ha kicsit be szeretnénk lesni a színfalak mögé, akkor válasszuk a második utat: látható, hogy

$$\tilde{y}_1(t) = e^{(\alpha + i\beta)t} = e^{\alpha t} (\cos \beta t + i \sin \beta t),$$

$$\tilde{y}_2(t) = e^{(\alpha-i\beta)t} = e^{\alpha t} (\cos \beta t - i \sin \beta t)$$

két független megoldást szolgáltat (az Euler-formulát használtuk), amelyek generálják a megoldások két dimenziós vektorterét. Az egyetlen probléma, hogy mi valós értékű függvényeket keresünk, $\tilde{y}_1$, $\tilde{y}_2$ pedig komplex értékűek. A trükk az, hogy a megoldások közül kiválasztunk két független, már valós értékű függvényt. Ez a két új függvény fogja generálni az összes valós értékű megoldást. A két új függvényünk természetesen előáll, mint $\tilde{y}_1$, $\tilde{y}_2$ lineáris kombinációja. Válasszuk a következő két függvényt (lehetne más is, de ez a legegyszerűbb lehetőség):

$$y_1(t) := \frac{1}{2} (\tilde{y}_1 + \tilde{y}_2) = e^{\alpha t} \cos \beta t$$

$$y_2(t) := \frac{1}{2i} (\tilde{y}_1 - \tilde{y}_2) = e^{\alpha t} \sin \beta t.$$

1.2.3. Példa. Az alábbiakban ezt a három esetet szemléltetjük:

1. $\ddot{y}(t) - \dot{y}(t) - 6y(t) = 0$
2. $\ddot{y}(t) - 8\dot{y}(t) + 16y(t) = 0$
3. $4\ddot{y}(t) + 4\dot{y}(t) + 37y(t) = 0$

Az első esetben a karakterisztikus polinom gyökei: 3 és -2 , így a megoldás $y(t) = c_1 e^{3t} + c_2 e^{-2t}$, a második esetben a karakterisztikus polinom egyetlen gyöke: 4, így a megoldás $y(t) = c_1 e^{4t} + c_2 t e^{4t}$, míg a harmadik esetben a karakterisztikus polinom gyökei: $-\frac{1}{2} \pm 3i$, így a megoldás $y(t) = c_1 e^{-\frac{1}{2}t} \cos 3t + c_2 e^{-\frac{1}{2}t} \sin 3t$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ mindenhol tetszőleges konstansok.

Folytassuk a második feladattal, vagyis a partikuláris megoldás előállításával. Két módszert mutatunk (hasonlóan az elsőrendű esethez). Először a konstansok variálását, mely mindig alkalmazható, de integrálásokat igényel, míg a második, a próbafüggvény módszer csak bizonyos esetekben alkalmazható, de ezekben az esetekben lényegesen "olcsóbb" így meghatározni a partikuláris megoldást, mert nem szükséges integrálnunk.

2.a Konstans variációs formula:
a partikuláris megoldás előáll

$$y_p(t) = c_1(t)y_1(t) + c_2(t)y_2(t) \tag{1.11}$$

alakban, ahol y_1, y_2 a megfelelő homogén egyenlet két független megoldása. A $c_1(t)$ és $c_2(t)$ függvényeket pedig az alábbi formulák szolgáltatják:

$$c_1(t) = \int \frac{\begin{vmatrix} 0 & y_2(t) \\ f(t) & \dot{y}_2(t) \end{vmatrix}}{W(t)} dt, \quad c_2(t) = \int \frac{\begin{vmatrix} y_1(t) & 0 \\ \dot{y}_1(t) & f(t) \end{vmatrix}}{W(t)} dt,$$

ahol

$$W(t) = \begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ \dot{y}_1(t) & \dot{y}_2(t) \end{vmatrix},$$

a *Wronski determináns*.

A formulák helyességét az Olvasó egyszerűen ellenőrizheti visszahelyettesítéssel. Az egyetlen meglepő fordulat az, hogy a rendszer szabadsági foka 2, (1.11) pedig csak egy szabadsági fokot foglal le, így érdemes feltenni a $\dot{c}_1(t)y_1(t) + \dot{c}_2(t)y_2(t) = 0$ mellékfeltételt is!

1.2.4. Példa. Szemléltessük az eljárást az alábbi példán!

$$\ddot{y}(t) - 4\dot{y}(t) + 3y(t) = e^{2t}$$

1. A homogén megoldást a karakterisztikus polinom

$$\lambda^2 - 4\lambda + 3$$

gyökei segítségével tudjuk meghatározni. A két gyök: 1 és 3, így

$$y_1(t) = e^t, \quad y_2(t) = e^{3t},$$

tehát $y_h(t) = c_1 e^t + c_2 e^{3t}$, ahol $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

2.a A partikuláris megoldást az állandók variálásával határozzuk meg.

$$W(t) = \begin{vmatrix} e^t & e^{3t} \\ e^t & 3e^{3t} \end{vmatrix} = 2e^{4t},$$

$$c_1(t) = \int \frac{-e^{5t}}{2e^{4t}} dt = -\frac{1}{2}e^t + C_1$$

$$c_2(t) = \int \frac{e^{3t}}{2e^{4t}} dt = -\frac{1}{2}e^{-t} + C_2.$$

A konstansokat önkényesen 0-nak választjuk, hiszen csak egy partikuláris megoldásra van szükségünk, tehát

$$y_p(t) = -\frac{1}{2}e^t e^t - \frac{1}{2}e^{-t} e^{3t} = -e^{2t}.$$

3. A megoldás

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t) = c_1 e^t + c_2 e^{3t} - e^{2t}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Ha a feladatot kiegészítjük az $y(0) = 0$, $\dot{y}(0) = 1$ feltételekkel kezdetiérték problémává, akkor könnyen látható, hogy a megoldás $e^{3t} - e^{2t}$. Matlabbal a következőképp oldhatjuk meg a kezdetiérték problémát:

```
syms y(t)
eqn = diff(y,t,2) - 4*diff(y,t,1) + 3*y == exp(2*t);
Dy = diff(y,t);
cond = [y(0)==0, Dy(0)==1];
dsolve(eqn,cond)

ans =
exp(3*t) - exp(2*t)
```

A továbbiakban megnézzük a másik módszert a partikuláris megoldás előállítására. Ez a próbafüggvény módszer, amely csak bizonyos esetekben alkalmazható, viszont ezen esetekben a megoldás előállítása általában olcsóbb, mint a konstansok variálásának módszerével.

2.b Tegyük fel, hogy $p, q \in \mathbb{R}$, vagyis (1.7) konstans együtthatós, továbbá

$$f(t) = e^{\gamma t} (P_1(t) \cos \delta t + P_2(t) \sin \delta t),$$

ahol $\gamma, \delta \in \mathbb{R}$ és P_1, P_2 polinomok. Jelöljük k -val, hogy hány-szoros gyöke a (1.10) karakterisztikus polinomnak $\gamma + \delta i$ (k értéke lehet 0 is). Ekkor a partikuláris megoldás

$$y_p(t) = t^k e^{\gamma t} (Q_1(t) \cos \delta t + Q_2(t) \sin \delta t)$$

alakú, ahol Q_1 és Q_2 olyan polinomok, melyek fokszáma nem nagyobb, mint P_1 és P_2 fokszámának maximuma.

1.2.5. Példa. Szemléltessük ezt a módszert is a már egyszer, de másképp, megoldott

$$\ddot{y}(t) - 4\dot{y}(t) + 3y(t) = e^{2t}$$

példán!

1. A homogén megoldás: $y_h(t) = c_1 e^t + c_2 e^{3t}$, ahol $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.
- 2.b A partikuláris megoldást a próbafüggvény módszerrel határozzuk meg. $f(t) = e^{2t}$, tehát $\gamma = 2$, $\delta = 0$, továbbá $k = 0$, hiszen a 2 nem gyöke a $\lambda^2 - 4\lambda + 3$ karakterisztikus egyenletnek. A P_1 polinom a konstans 1, míg P_2 -t választhatjuk az azonosan 0 polinomnak, hiszen $\sin 0 = 0$ szorozza. Így a megoldást kereshetjük $y_p(t) = A e^{2t}$ alakban, ahol A értéke visszahelyettesítéssel adódik: $A = -1$, tehát

$$y_p(t) = -e^{2t}$$

3. A befejező lépésben nincs változás.

1.2.6. Példa. Változtassunk egy kicsit az előző példán!

$$\ddot{y}(t) - 4\dot{y}(t) + 3y(t) = e^t$$

1. A homogén megoldás: $y_h(t) = c_1 e^t + c_2 e^{3t}$, ahol $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ ugyanúgy, mint eddig.
- 2.b A partikuláris megoldást a próbafüggvény módszerrel határozzuk meg. $f(t) = e^t$, tehát $\gamma = 1$, $\delta = 0$, továbbá $k = 1$, hiszen az 1 egyszeres gyöke a $\lambda^2 - 4\lambda + 3$ karakterisztikus egyenletnek. A P_1 polinom a konstans 1, míg P_2 -t választhatjuk az azonosan 0 polinomnak, hiszen $\sin 0 = 0$ szorozza. Így a megoldást kereshetjük $y_p(t) = A t e^t$ alakban, ahol A értéke visszahelyettesítéssel adódik: $A = -\frac{1}{2}$, tehát

$$y_p(t) = -\frac{1}{2} t e^t$$

3. A megoldás:

$$y(t) = c_1 e^t + c_2 e^{3t} - \frac{1}{2} t e^t,$$

ahol $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Gyakorló feladatok:

1. Oldjuk meg a (1.6) bevezető feladatot a tanult módon!
2. Magasabbrendű állandó együtthatós lineáris differenciálegyenletek. Használjuk a másodrendűeknél bevált technikát.

- (a) $\ddot{y}(t) - 2\dot{y}(t) - 3y(t) = 0$
 (b) $\ddot{y}(t) - 2\ddot{y}(t) + 2\ddot{y}(t) - 2\dot{y}(t) + y(t) = 0$
3. Oldjuk meg az alábbi nem állandó együtthatós egyenleteket a szerencsés tipp módszerével! Figyeljünk arra, hogy a partikuláris megoldás előállítására csak az állandók variálásának módszere működik.
- (a) $(2t + 1)\ddot{y}(t) + 4t\dot{y}(t) - 4y(t) = 0$
 (b) $t\ddot{y}(t) - (2t + 1)\dot{y}(t) + (t + 1)y(t) = e^t$
4. Másodrendű állandó együtthatós lineáris differenciálegyenletek. A partikuláris megoldás előállítására használjuk a próbafüggvény módszert!
- (a) $\ddot{y}(t) + 6\dot{y}(t) + 9y(t) = 2e^{-3t}$
 (b) $\ddot{y}(t) - 3\dot{y}(t) + 2y(t) = e^t \cos t$
 (c) $\ddot{y}(t) + 5\dot{y}(t) + 4y(t) = 3 - 2t - t^2$
 (d) $\ddot{y}(t) + 4y(t) = \cos 2t$
 (e) $\ddot{y}(t) + 2\dot{y}(t) - 3y(t) = t^2 e^t$
 (f) $\ddot{y}(t) - 4\dot{y}(t) + 8y(t) = e^{2t} + \sin 2t$

1.2.2. Modellezés másodrendű differenciálegyenletekkel

1.2.7. Példa. Módosítsuk a 1.2.1.Példát! Vegyük figyelembe a közeg általi csillapítást is! Általában ez az erő egyenesen arányosnak tekinthető a sebességgel. Ezek alapján az egyenlet, már egyszerűsített alakban

$$\ddot{x}(t) + d\dot{x}(t) + a^2x(t) = 0, \quad (1.12)$$

ahol $d > 0$ a tömeggel osztott csillapítási konstans, illetve $a^2 = \frac{k}{m}$.

A karakterisztikus polinom

$$\lambda^2 + d\lambda + a^2,$$

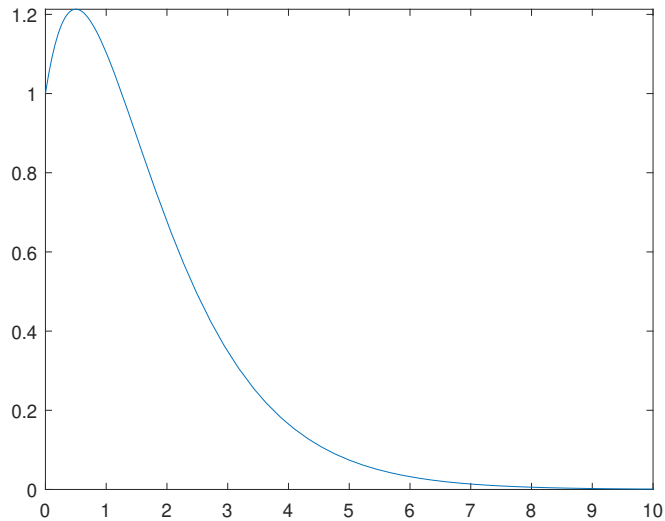
melynek gyökei

$$\lambda_{1,2} = \frac{-d \pm \sqrt{d^2 - 4a^2}}{2}.$$

Érdemes megkülönböztetni három esetet a diszkrimináns előjele szerint.

- Ha $d^2 - 4a^2 = 0$, akkor $\lambda_{1,2} = \lambda = -\frac{d}{2}$, így

$$x(t) = c_1 e^{-\frac{d}{2}t} + c_2 t e^{-\frac{d}{2}t}.$$



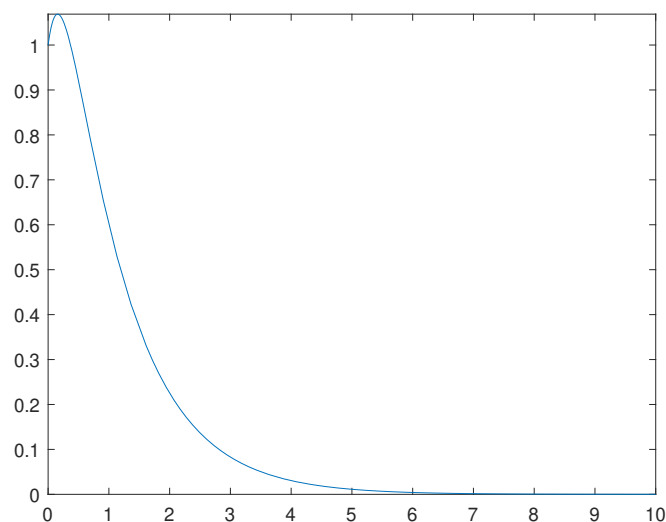
1.4. ábra. A megoldás gráfja a kritikus csillapítás esetén.

```
syms y(t)
eqn = diff(y,t,2) + 2*diff(y,t) + y == 0;
Dy = diff(y,t);
cond = [y(0)==1, Dy(0)==1];
sol(t)=dsolve(eqn,cond)
fplot(sol,[0 10])
```

```
ans =
exp(-t) + 2*t*exp(-t)
```

- Ha $d^2 - 4a^2 > 0$, akkor $d^2 > b^2 := d^2 - 4a^2$, $\lambda_{1,2} = \frac{-d \pm b}{2} < 0$, így

$$x(t) = c_1 e^{\frac{-d+b}{2}t} + c_2 e^{\frac{-d-b}{2}t}.$$



1.5. ábra. A megoldás gráfja túlszillapítás esetén.

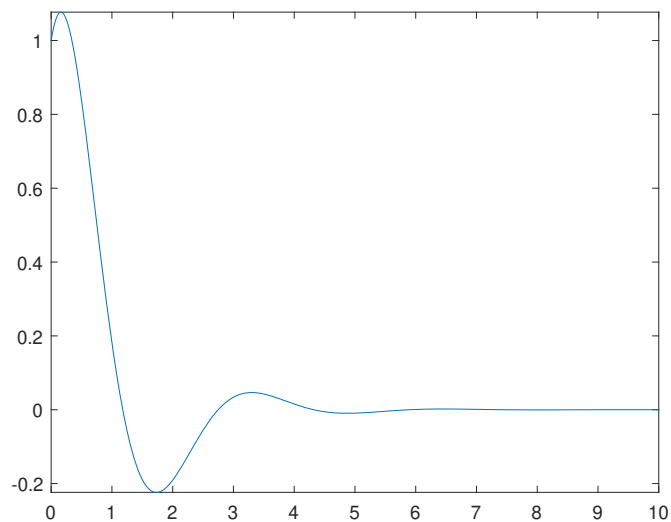
```
syms y(t)
eqn = diff(y,t,2) + 5*diff(y,t) + 4*y == 0;
Dy = diff(y,t);
cond = [y(0)==1, Dy(0)==1];
sol(t)=dsolve(eqn,cond)
fplot(sol,[0 10])
```

```
ans =
(5*exp(-t))/3 - (2*exp(-4*t))/3
```

- Ha $d^2 - 4a^2 < 0$, akkor $-b^2 := d^2 - 4a^2$, $\lambda_{1,2} = \frac{-d \pm bi}{2}$, így

$$x(t) = c_1 e^{-\frac{d}{2}t} \cos \frac{b}{2}t + c_2 e^{-\frac{d}{2}t} \sin \frac{b}{2}t.$$

```
syms y(t)
eqn = diff(y,t,2) + 2*diff(y,t) + 5*y == 0;
Dy = diff(y,t);
cond = [y(0)==1, Dy(0)==1];
```



1.6. ábra. A megoldás gráfja alulcsillapítás esetén.

```
sol(t)=dsolve(eqn,cond)
fplot(sol,[0 10])
```

```
ans =
cos(2*t)*exp(-t) + sin(2*t)*exp(-t)
```

Az Olvasó igazolja, hogy a megoldásokra igaz, hogy

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = 0,$$

azaz tényleg csillapítjuk a rendszert!

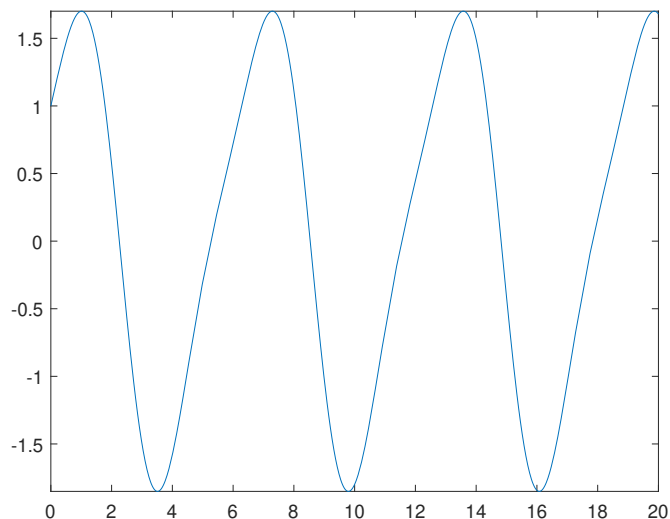
1.2.8. Példa. Térjünk vissza a 1.2.1.Példára, de most csillapítás helyett gerjesszük a rendszert periodikus módon:

$$\ddot{x}(t) + a^2 x(t) = \cos \omega t. \quad (1.13)$$

A kérdés az, hogy van-e olyan értéke ω -nak, melyre a megoldás nem lesz korlátos?

A homogén megoldás nem függ a gerjesztéstől: $x_h(t) = c_1 \cos at + c_2 \sin at$.
A partikuláris megoldás előállítására érdemes a próbafüggvény módszert választani.
Ha

- $a \neq \pm\omega$, akkor $x_p(t) = k_1 \cos \omega t + k_2 \sin \omega t$, így $x_p(t) = \frac{1}{a^2 - \omega^2} \cos \omega t$. A megoldás korlátos.



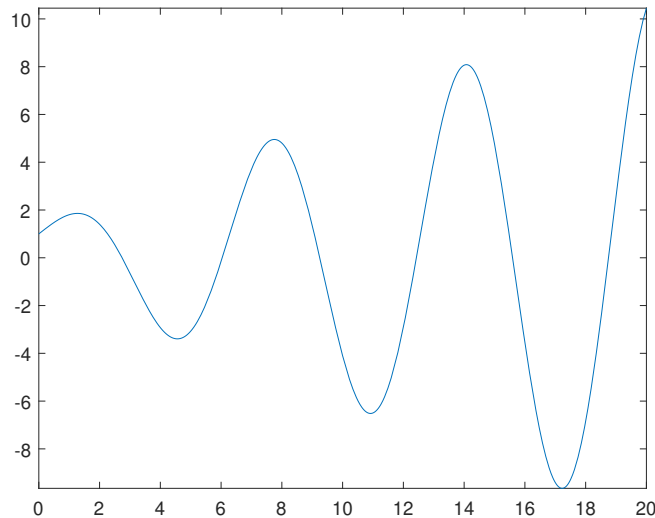
1.7. ábra. A megoldás gráfja nem rezonáns gerjesztés esetén.

```
syms y(t)
eqn = diff(y,t,2) + y == cos(2*t);
Dy = diff(y,t);
cond = [y(0)==1, Dy(0)==1];
sol(t)=dsolve(eqn,cond)
simplify(sol)
fplot(sol,[0 20])

ans =
(8*cos(t))/3 + sin(t) - (8*cos(t/2)^4)/3 + 1
```

- Viszont, ha $a = (\pm)\omega$, akkor $x_p(t) = t(k_1 \cos \omega t + k_2 \sin \omega t)$, így $x_p(t) = \frac{1}{2\omega} t \sin \omega t$, ami nem korlátos. Ez az úgynevezett *rezonancia* jelensége, mely akkor lép fel, ha a gerjesztés frekvenciája megegyezik a homogén megoldás frekvenciájával.

```
syms y(t)
```



1.8. ábra. A megoldás gráfja rezonáns gerjesztés esetén.

```

eqn = diff(y,t,2) + y == cos(t);
Dy = diff(y,t);
cond = [y(0)==1, Dy(0)==1];
sol(t)=dsolve(eqn,cond)
simplify(sol)
fplot(sol,[0 20])

ans =
cos(t) + sin(t) + (t*sin(t))/2

```

Az Olvasó vizsgálja meg a csillapított-gerjesztett változatot is!

Sokáig úgy gondolták, hogy ez a rendszer jó (habár kétség kívül egyszerűsített) modellként szolgálhat a Tacoma híd katasztrófájának megmagyarázásában. A viharszerű széllekek (melyeket periodikus gerjesztésnek tekintettek) a hidat egyre nagyobb kitérésű rezgésre kényszerítették, aminek a híd szilárdsága nem tudott sokáig ellenállni és a híd leszakadt. Egy idő után ezt a megközelítést megkérdőjelezték és másik modell szükségszerűsége mellett érveltek. Az Olvasó erről olvashat egy érdekes összefoglalót: [BDH12, 439 oldal].

1.2.9. Példa. A 1.2.1.Példa tárgyalása során megjegyeztük, hogy a rugó visszaállító ereje inkább $F(t) = -k\text{sign}(x(t))|x(t)|^\alpha$, ahol $0 < \alpha < 1$. Ez a

feltételezés az

$$m\ddot{x}(t) + k\operatorname{sign}(x(t)) |x(t)|^\alpha = 0 \quad (1.14)$$

nemlineáris egyenletet szolgáltatja. Ez az egyenlet már túl nehéz ahhoz, hogy megoldjuk, az Olvasó próbálja ki, hogy a Matlab sem boldogul vele!

1.2.10. Példa. Matematikai inga: tekintsünk egy ideális (tömeggel nem rendelkező) rudat, melyet az egyik végénél a plafonhoz rögzítünk. A másik végére m tömegű testet rögzítünk, majd kitérítjük egy Θ_0 szöggel és elengedjük. Adjuk meg a test kitérését az idő függvényében!

Az Olvasó vezesse le, hogy a test kitérését az alábbi differenciálegyenlet írja le:

$$\ddot{\Theta}(t) + \frac{g}{l} \sin \Theta(t) = 0 \quad (1.15)$$

Ez az egyenlet is nemlineáris, így csak a Matlab segítségével próbáljuk meg megoldani:

```
syms y(t) g l
eqn = diff(y,t,2) +g/l*sin(y) == 0;
dsolve(eqn)
```

ans =

```
2*jacobiAM((2^(1/2)*(C13 - g/l)^(1/2)*(C15 - t)*1i)/2, (2*g)/(g - C13*1))
-2*jacobiAM((2^(1/2)*(C13 - g/l)^(1/2)*(C15 - t)*1i)/2, (2*g)/(g - C13*1))
```

A furcsa az, hogy ha megpróbáljuk megadni a kezdeti feltételeket, akkor a Matlab képtelen megoldani a feladatot!

Ezek alapján nem furcsa, hogy megpróbáljuk egyszerűsíteni a modellt! Felhasználva, hogy kis szögekre $\sin \Theta \approx \Theta$, így jó gondolatnak tűnik áttérni a

$$\ddot{\Theta}(t) + \frac{g}{l} \Theta(t) = 0$$

egyenletre. Vegyük észre, hogy ez pont a (1.6) egyenlet (amit persze meg tudunk oldani)! A kérdés az, hogy ez az egyszerűsítés vajon mennyire elfogadható. Erre a kérdésre a továbbiakban még visszatérünk. A tanulság, amit most leszűrünk az az, hogy kompromisszumot kell tudni kötni a modell valósághű volta és megoldhatósága között. Ez a modellezés alapkérdése: ha a modell nagyon valósághű, de nem tudjuk megoldani, akkor hiába jó a modell, illetve, ha meg tudjuk oldani, de a modell nem eléggé valósághű, akkor hiába oldjuk

1.3. KÖZÖNSÉGES DIFFERENCIÁLEGYENLETEK KVALITATÍV VIZSGÁLATA41

meg, mert nem arról szolgáltat információt, amiről szeretnénk. A jó modell elég bonyolult ahhoz, hogy elég jól leírja a valóságot, ugyanakkor elég egyszerű ahhoz, hogy meg tudjuk oldani.

Látni fogjuk, hogy ez a megközelítés még túl szigorú, megoldhatóság helyett be fogjuk érni azzal, hogy kellőképpen pontosan tudjuk közelíteni a megoldást.

1.3. Közönséges differenciálegyenletek kvalitatív vizsgálata

Az előző fejezetekben lépten-nyomon belefutottunk abba a problémába, hogy valamilyen okból kifolyólag (integrálás, implicitiség, nincs is recept) nem tudunk megoldani differenciálegyenleteket. Mekkora gond ez? Ahhoz, hogy tisztábban lássuk ezt a kérdést, lépünk vissza még egyet és próbáljunk meg válaszolni egy másik, triviálisnak tűnő kérdésre!

Miért akarunk megoldani differenciálegyenleteket? Ha az egyenletünk valamely folyamatot jellemez, akkor szeretnénk tudni, hogy mi fog történni a jövőben (esetleg a múltat szeretnénk rekonstruálni). Ha meg tudjuk oldani az egyenletet, akkor már csak be kell helyettesíteni a megfelelő t értéket, hogy megtudjuk $y(t)$ értékét abban a pillanatban.

Ez egy kvantitatív megközelítés, aminek megvannak a hátulütői. Egyrésztől nem biztos, hogy meg tudjuk oldani az egyenletet. Másrésztől az egyenlet egy modellje az adott folyamatnak, amit lehet, hogy egyszerűsítésekkel kaptunk. A megoldás tehát nem fogja pontosan megadni a keresett értéket (de reményeink szerint jó közelítést szolgáltat). Ha az Olvasó azzal az ellenvetéssel él, hogy mi a helyzet akkor, ha pontosan modellezünk, tehát nem élünk egyszerűsítésekkel? Amellett, hogy ez gyakorlatilag lehetetlen, ezzel el is tolnánk olyan irányba a differenciálegyenletet, hogy jó eséllyel nem tudjuk megoldani. Emellett a legegyszerűbb modell is tartalmaz konstansokat (pl. $g = 9.81 \dots$), illetve meg kell adjuk a kezdeti értéket. Mindezek méréseken alapulnak, amik természetüknél fogva nem lehetnek teljesen pontosak.

Mit lehet ebben az esetben tenni? A kvantitatív megközelítést lecseréljük kvalitatívra. Mit is jelent ez? Nem egy pontos értéket akarunk szolgáltatni, hanem a megoldás tulajdonságaiból kiindulva mondjuk meg, hogy körülbelül mire számíthatunk a jövőben. A kérdés persze az, hogy miképpen tudunk bármit is mondani a megoldásról, ha nem oldjuk meg az egyenletet? Az

érdekes az, hogy az egyenlet maga rengeteg információt szolgáltat a megoldásról, már csupán minimális átalakítást alkalmazva is. Lássuk, hogyan is működik ez a Példa.1.1.4-en, ahol a kvantitatív megközelítés valamennyire csődöt mondott!

1.3.1. Példa.

$$\dot{y}(t) = 1 - y^4(t)$$

Először is leszögezzük, hogy várhatóan végtelen sok ilyen $y(t)$ függvény van, hiszen nem adtunk meg kezdeti értéket. A továbbiakban, ha $y(t)$ függvényről beszélünk, akkor ez így nem egy darab függvényt jelent!

Megoldási kísérlet helyett csak a jobb oldalt alakítjuk át a szokott módon:

$$1 - y^4(t) = (1 - y(t))(1 + y(t))(1 + y^2(t))$$

amiből persze az $y(t) \equiv 1$ és $y(t) \equiv -1$ megoldások automatikusan adódnak, mint eddig. Most váltunk az új megközelítésre: megvizsgáljuk a jobb oldal előjelét. Könnyen látható, hogy a $(-\infty, -1)$ intervallumon negatív, a $(-1, 1)$ intervallumon pozitív, az $(1, \infty)$ intervallumon negatív. Vegyük észre azt is, hogy ez egyben $\dot{y}(t)$ előjele is! Ez azt jelenti, hogy meg tudjuk mondani $y(t)$ monotonitási tulajdonságait:

- ha valamely t értékre $y(t) \in (-\infty, -1)$, akkor $y(t)$ onnantól csökken;
- ha $y(t) = -1$ valamely t értékre, akkor onnantól se nem csökken, se nem nő, tehát konstans -1 marad;
- ha valamely t értékre $y(t) \in (-1, 1)$, akkor $y(t)$ onnantól nő;
- ha $y(t) = 1$ valamely t értékre, akkor onnantól se nem csökken, se nem nő, tehát konstans 1 marad;
- ha valamely t értékre $y(t) \in (1, \infty)$, akkor pedig $y(t)$ onnantól csökken.

Ez alapján már hozzávetőlegesen meg tudjuk rajzolni az úgynevezett *fázisképet*. Ez majdnem minden fontos információt elárul a megoldás viselkedéséről.

Az egyenlet megoldásgörbéinek ábrázolásához még meghatározzuk az inflexiós pontokat, a konvexitási és konkávitási tartományokat az egyenlet deriválásával:

$$\ddot{y}(t) = -4y^3(t)\dot{y}(t) = -4y^3(t)(1 - y^4(t)) ,$$

melynek előjeléből arra következtethetünk, hogy:



1.9. ábra. Fáziskép.

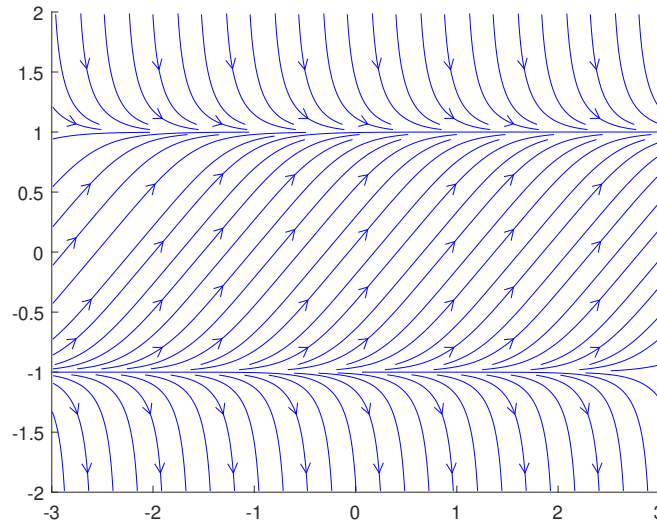
- a $(-\infty, -1)$ intervallumon $y(t)$ konkáv;
- a $(-1, 0)$ intervallumon $y(t)$ konvex;
- az $y = 0$ inflexiós pontja az $y(t)$ függvénynek;
- a $(0, 1)$ intervallumon $y(t)$ konkáv;
- az $(1, \infty)$ intervallumon pedig $y(t)$ konvex.

Figyelem, az intervallumok itt is y -ra vonatkoznak és nem t -re! Az $y = -1$ illetve $y = 1$ nem inflexiós pontjai az $y(t)$ függvénynek, mert az $y(t) \equiv 1$ és $y(t) \equiv -1$ megoldások elszeparálják egymástól a $(-\infty, -1)$ intervallumban, az $(-1, 1)$ intervallumban és az $(1, \infty)$ intervallumban haladó megoldásokat.

Természetesen a Matlab is képes megrajzolni (az egyenlet megoldása nélkül, hozzávetőlegesen) a megoldások seregét:

```
[t,y]=meshgrid(-3:.1:3,-2:.1:2);
dy = 1 - y.^4 ;
dt=ones(size(dy));
streamslice(t,y,dt,dy,1.5)
```

Tudunk most már válaszolni arra a kérdésre, hogy mi fog történni a jövőben? Nagyjából igen. Annak függvényében, hogy honnan indul a folyamat, meg tudjuk mondani, hogy csökkenni, vagy nőni fog-e y értéke, vagy konstans marad (ehhez a fáziskép is elegendő), illetve, hogy ezt konkáv vagy konvex



1.10. ábra. Az $\dot{y}(t) = 1 - y^4(t)$ egyenlet (hozzávetőleges) megoldásgörbéi.

módon teszi-e. Két kis kérdésre nem tudunk egyelőre precízen válaszolni, ezek az alábbiak. Ha a folyamat a

- $(-1, 1)$ intervallumból indul, akkor y értéke nő és ennek felső korlátja 1, de arra nem tudunk válaszolni, hogy véges időben eléri-e ezt az értéket. Később, amikor be fogjuk tudni látni, hogy minden kezdeti érték esetén ennek az egyenletnek a megoldása egyértelmű (lásd 2.Rész), akkor világossá válik, hogy nem metszhetünk bele a konstans 1 megoldásba, tehát nem érhetjük el ezt az értéket, csak tartunk hozzá;
- az $(1, \infty)$ intervallumból indul akkor y értéke csökkenni fog és hasonlóképpen a megoldás egyértelműsége miatt nem éri el véges időben az 1 értéket, de oda tart.

Az 1 és -1 értékek a folyamat *stacionárius pontjai*, mégpedig az 1 *stabil stacionárius pont*, a -1 *instabil stacionárius pont*. Ez azt jelenti, hogy ha a folyamatot ezen értékek valamelyikéből indítjuk, akkor ebben az állapotban is marad. A különbség a két stacionárius pont között az, hogy mi történik akkor, ha egy kicsit kitérítjük ebből az állapotból.

Az 1 esetében nem fog "elszökni", sőt a mi esetünkben vissza fog térni ehhez az értékhez (később, amikor pontosan definiáljuk ezeket a fogalmakat,

akkor az ilyen típusú pontot aszimptotikusan stabil stacionárius pontnak fogjuk nevezni), igaz ehhez végtelenül hosszú időre van szükség. Míg ha a -1 értékből térítjük ki egy kicsit, akkor onnan "elszökik".

A példában szereplő egyenlet speciális volt bizonyos szempontból. Úgynevezett *autonóm KDE* típusú volt, vagyis

$$\dot{y}(t) = f(y(t)) \quad (\text{autonóm KDE})$$

alakú. Ez azt jelenti, hogy a jobb oldal csak az ismeretlen függvénytől függ (és t -től nem). Például $\dot{y}(t) = \sin y(t)$ autonóm KDE, de $\dot{y}(t) = t \sin y(t)$ nem autonóm KDE.

Stacionárius pontokról csak autonóm KDE esetében tudunk beszélni. A kérdés az, hogy mennyire jellemző az, hogy egy KDE autonóm? Érdekes megkülönböztetnünk ezt a típust? Ez a kérdés így természetesen elég aluldefiniált. Kicsit pontosabban fogalmazva: ha modellezünk egy folyamatot, mennyire valószínű, hogy autonóm KDE-tel tudjuk ezt megtenni?

Fizikai folyamatok modellezésénél fizikai törvényekből indulunk ki. Ezek a törvények időponttól függetlenek (lásd pl. Newton-törvényeit). A mai nap, vagy a holnapi nap a gravitáció ugyanúgy fog hatni. Természetesen ez nem jelenti azt, hogy az egyenlet minden esetben autonóm lesz - lásd a manóhangyás 1.1.17. Feladatot - de nagyon sok esetben igen.

Gyakorló feladatok:

- Rajzoljuk meg az alábbi egyenletek fázisképét, ábrázoljuk a megoldásgörbéket (manuálisan). Határozzuk meg a stacionárius pontokat és típusukat!
 - $\dot{y}(t) = \sin y(t)$
 - $\dot{y}(t) = \tan y(t)$
 - $\dot{y}(t) = 1 - y^3(t)$
- Tekintsük az $\dot{y}(t) = t \sin y(t)$ nem autonóm egyenletet! Az autonóm esetben alkalmazott technika itt nem működik. Próbáljuk meg ábrázolni a megoldásgörbéket a következő módon: Vegyünk egy rácsot (a Matlab meshgrid parancsa is ezt teszi), aminek ne legyen nagyon sok rácspontja (különben nagyon időigényes lesz a művelet). Ezekben a pontokban számoljuk ki a jobb oldal értékét! Ezek pont a keresett függvény érintőjének meredekségét adják (hiszen a derivált értékét számítottuk

ki). Jelöljük ezt az adott pontokon átmenő megfelelő meredekségű kis szakaszokkal (ez az úgynevezett *iránymező*)! Ezután ezeket a szakaszokat igyekezzünk összekötni.

3. Alkalmazzuk a Matlabot az előző feladatok megoldásgörbéinek ábrázolására! Van olyan eset, ahol a Matlab által szolgáltatott ábra nem helyes? Miért van ez?
-

2. fejezet

Közönséges differenciálegyenletek – elméleti rész

Ebben a részben kezdetiérték problémák megoldásának létezésével, egyértelműségével és stabilitásával kapcsolatos kérdéseit fogjuk tárgyalni. Bevezetjük a korrekt kitűzésű feladat fogalmát, ami ezen három fogalomra épül, és nagyjából azokat a kezdetiérték problémákat jelenti, amiket valós folyamatok megfelelő modellezésével kapunk.

2.1. A megoldás létezése és egyértelműsége

Az előző fejezetben bizonyos típusú kezdetiérték problémákra adtunk megoldási receptet. Fontos, hogy megértsük, hogy most egyáltalán nem ez a terv! Az egyik kérdés, amivel foglalkozni fogunk az a következő: anélkül, hogy megoldanánk, szeretnénk eldönteni, hogy egy adott KÉP-nak van-e megoldása, illetve a megoldás egyértelmű-e. Ez elsőre lehetetlennek tűnik, de egyáltalán nem az. Sőt, bizonyos esetekben, amikor a megoldási recept csődöt mond - például nem tudjuk az adott függvény primitív függvényét zárt alakban megadni, vagy implicitségi problémába ütközünk - így mégis meg tudjuk mondani, hogy a megoldás létezik és egyértelmű.

Ez a kérdéskör nem csak elméleti játszadozás, a gyakorlatból származik. Ha valamely valós folyamatot modellezünk és a kapott KÉP-nak nincs megoldása, akkor tudjuk, hogy valamit elrontottunk a modellezés folyamán, hiszen a valóságban történni fog valami! Hasonlóképpen, ha olyan egyenletre jutunk, melynek több megoldása van, akkor jó eséllyel valamit még nem vettünk

figyelembe, hiszen a valóságban egyféleképp történnek a dolgok.

Láttuk, hogy a 1.3.1.Példa kapcsán is jó lenne, ha be tudnánk látni a megoldás egyértelműségét (ahol nem tudtuk megoldani az egyenletet implicitiségi probléma miatt), mert a kvalitatív megközelítést teljessé tudnánk vele tenni.

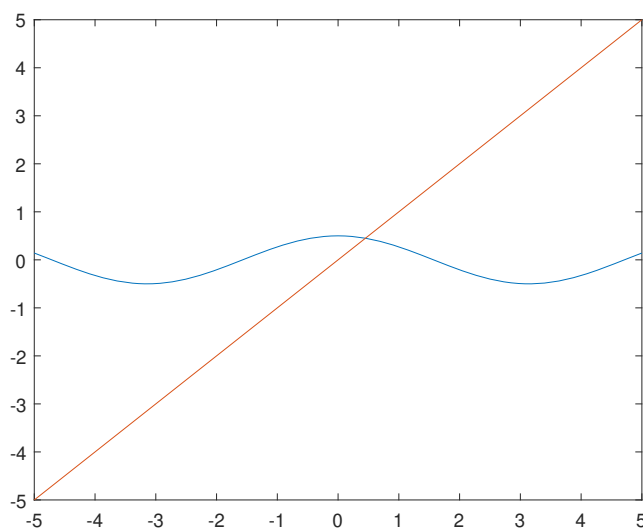
Egy egyszerű (de mégis messzire mutató) példán fogjuk szemléltetni, ezeket a kérdéseket és a tervet is, hogy miképp lehet ilyen kérdéseket megválaszolni.

2.1.1. Példa. Tekintsük a

$$\frac{\cos x}{2} = x \quad (2.1)$$

egyenletet.

Ábrázoljuk mindkét oldalt egy koordinátarendszerben, hogy legyen valami kezdő elképzelésünk arról, hogy van-e egyáltalán megoldás és ha van, mennyi. Erre kiválóan alkalmas a Matlab:



2.1. ábra. Az $\frac{\cos x}{2} = x$ egyenlet két oldala.

```
syms x
fplot(cos(x)/2)
hold on
fplot(x)
```

Az ábra azt sugallja, hogy van megoldás, mégpedig pontosan egy. Ennek közelítőleges értéke:

```
solve(cos(x)/2==x)
```

Egy figyelmeztetést kapunk, miszerint szimbolikusan nem tudja megoldani a Matlab, ezért numerikus közelítést ad:

```
ans =  
0.45018361129487357303653869676269
```

Először is tisztázzuk, hogy zárt alakban nem lehet kifejezni a megoldást. De egyrészt a megoldás létezését és egyértelműségét többféleképpen be lehet bizonyítani (figyelem, az ábra csak arra jó, hogy megsejtsünk valamit, bizonyítéknak kevés). Továbbá, a megoldás közelítésére is több lehetőség van.

Az egyik lehetőség végigjárását az Olvasóra bízunk. Először lássuk be, hogy az $f(x) = x - \frac{\cos x}{2}$ függvény szigorúan monoton nő, majd találjunk egy olyan értéket melyre $f(x)$ negatív, majd egy olyat, amire pozitív. Ez elegendő a megoldás létezésének és egyértelműségének belátásához. (Miért?) A megoldás közelítésére használhatunk intervallumfelezést, vagy Newton iterációt.

Mi egy másik utat választunk. Vezessük be az $F(x) = \frac{\cos x}{2}$ jelölést. Definiálunk egy iterációt a következőképpen:

$$\begin{cases} x^{(0)} = 0 \\ x^{(k+1)} = F(x^{(k)}) \end{cases} \quad (2.2)$$

vagyis egy kezdőértékre (amit most az egyszerűség kedvéért 0-nak választunk) alkalmazzuk az F függvényt és ezt ismételtetjük. Ez egy nagyon egyszerű eljárás (könnyű is leprogramozni) nem véletlenül hívják *egyszerű iterációnak*.

```
format long  
x=0;  
for i=1:10  
x=cos(x)/2  
end
```

A válasz pedig

```

x =
  0.5000000000000000
x =
  0.438791280945186
x =
  0.452632921660210
x =
  0.449649376213660
x =
  0.450299778131450
x =
  0.450158334369681
x =
  0.450189110536143
x =
  0.450182414843278
x =
  0.450183871601057
x =
  0.450183554661232

```

egy szemmel láthatólag a megoldáshoz konvergáló sorozat. (Az iterációt természetesen tovább is futtathattuk volna és elég lenne az utolsó értéket kiírni, de mi itt szemléltetni szeretnénk volna, hogy egy odatartó sorozatot generáltunk.) Ez természetesen csak egy sejtés, amit még igazolnunk kell.

Először megmutatjuk, hogy F kontrakció (lásd 5.1.6.Definíció), vagyis $\exists q < 1$ mellyel

$$|F(x) - F(y)| \leq q |x - y|$$

teljesül $\forall x, y \in \mathbb{R}$ esetén. Ehhez elegendő a 5.1.15.Lemmát alkalmaznunk:

$$|F'(x)| = \left| -\frac{\sin x}{2} \right| \leq \frac{1}{2},$$

vagyis kontrakciós állandónak választhatjuk a $q = \frac{1}{2} < 1$ értéket.

Maximum egy megoldása lehet az egyenletnek, másképp fogalmazva maximum egy fixpontja lehet az F függvénynek, hiszen ha lenne kettő $\bar{x} \neq x^*$, melyekre $\bar{x} \neq x^*$ akkor

$$|\bar{x} - x^*| = |F(\bar{x}) - F(x^*)| \leq \frac{1}{2} |\bar{x} - x^*|,$$

ellentmondás. Ha tudnánk, hogy van egy megoldás x^* (az előzőek szerint egyetlen), akkor az iteráció oda konvergál:

$$|x^* - x^{(n)}| = |F(x^*) - F(x^{(n-1)})| \leq \frac{1}{2} |x^* - x^{(n-1)}|,$$

tehát minden lépéssel legalább megfelezzük a hibát.

Mindeddig feltettük, hogy van megoldása az egyenletnek. Most meg fogjuk mutatni, hogy ez teljesül. Belátjuk, hogy az iteráció Cauchy sorozatot (lásd 5.1.1. Definíció) generál. Legyen $m > n$, háromszög egyenlőtlenséget használva:

$$|x^{(m)} - x^{(n)}| \leq |x^{(m)} - x^{(m-1)}| + |x^{(m-1)} - x^{(m-2)}| + \dots + |x^{(n+1)} - x^{(n)}|.$$

Ezeket a tagokat fogjuk egyenként "visszatolni" a következőképpen:

$$|x^{(k+1)} - x^{(k)}| = |F(x^{(k)}) - F(x^{(k-1)})| \leq \frac{1}{2} |x^{(k)} - x^{(k-1)}| \leq \dots \leq \frac{1}{2^k} |x^{(1)} - x^{(0)}|.$$

Tehát

$$|x^{(m)} - x^{(n)}| \leq \frac{1}{2^n} \left(\frac{1}{2^{m-n-1}} + \dots + 1 \right) |x^{(1)} - x^{(0)}|.$$

A zárójelben egy mértani sorozat tagjait összegezzük a nulladiktól az $m - n - 1$ -dik tagig. Ezt növeljük, ha végtelenig megyünk és használjuk, hogy $-1 < q < 1$ esetén $\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}$:

$$\frac{1}{2^{m-n-1}} + \dots + 1 < 2,$$

és felhasználva, hogy a mi esetünkben $|x^{(1)} - x^{(0)}| = \frac{1}{2}$ kapjuk, hogy

$$|x^{(m)} - x^{(n)}| < \frac{1}{2^n}.$$

A sorozat tehát Cauchy és így konvergens is, lásd 5.1.2. Tétel. Konvergens, de hova tart?

Jelöljük a határértékét $\bar{x}$ -sal. Vegyük az $x^{(k)} = F(x^{(k-1)})$ azonosságot mindkét oldalának limeszét! Mivel F kontrakció, így folytonos is, tehát

$$\bar{x} = \lim x^{(k)} = \lim F(x^{(k-1)}) = F(\lim x^{(k-1)}) = F(\bar{x}),$$

ahonnan kapjuk, hogy $\bar{x}$ fixpontja F -nek. Ezzel a kirakós minden darabja a helyére került, készen vagyunk.

Tanultunk egy technikát, amivel (bizonyos esetekben) be lehet látni egyenletekről, hogy létezik és egyértelmű a megoldásuk, sőt egy a megoldáshoz tartó sorozatot is tudunk generálni az egyszerű iteráció segítségével. Mindez szépen működött egy skalár egyenlet esetében, de mi a helyzet egy differenciálegyenlettel? A megoldáshoz tartó sorozat ebben az esetben függvénysorozat. Miképp lehet értelmezni, hogy egy függvénysorozat Cauchy? Ilyen kérdésekre kell tudjunk válaszolni, ha ezt a technikát szeretnénk kiterjeszteni differenciálegyenletekre.

2.1.1. Előkészületek – Metrikus terek

Legyenek $x, y \in \mathbb{R}$. Mit is jelent $|x - y|$? Ha ezt jól meg tudjuk válaszolni, akkor az összes ehhez kapcsolódó fogalom - konvergencia, Cauchy sorozat stb. - értelmezhető lesz pl. függvényekre is.

Természetesen x és y távolságát! Ez triviális valós számokra, de mi pl. két függvény távolsága? A következőkben erre a kérdésre keressük a választ.

Ezt ugyanazon a "ravasz és nagyravágyó" módon tesszük, ahogy a vektorterek fogalmát definiáltuk általánosan, lásd a lineáris algebra fejezetet, 5.2.1. Definíció. Vagyis összegyűjtjük a távolság legfontosabb tulajdonságait és bármit, ami rendelkezik ezekkel a tulajdonságokkal, távolságnak (idegen szóval metrikának) fogjuk hívni. Emellett nagyravágyó, mert tetszőleges dolgok közt szeretnénk távolságot mérni.

Az Olvasónak felhívjuk a figyelmét arra, hogy ebben a fejezetben sok, a természetes beidegződéseknek ellentmondó dolgot találhat (pl. olyan halmaz, ami egyszerre zárt és nyílt), így legyen óvatos. Segítségül megadtunk egy elektronikus jegyzetet, melyben kidolgozott példákat találhat, aminek átnézésével segítheti az új fogalmak megértését.

Alapfogalmak. [MHH13, I/1.]

2.1.2. Definíció. Legyen X egy nemüres halmaz, $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ pedig egy függvény, mely rendelkezik az alábbi három tulajdonsággal.

1. $d(x, y) = 0 \iff x = y$
2. $d(x, y) = d(y, x) \quad \forall x, y \in X$
3. $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) \quad \forall x, y, z \in X$ (háromszög-egyenlőtlenség)

Ekkor a d függvényt X -en értelmezett *metrikának* (távolságfüggvénynek) a $d(x, y) \in \mathbb{R}_0^+$ számot az x elem y elemtől vett távolságának, végül az (X, d) rendezett párt *metrikus térnek* (MT) nevezzük.

[MHH13, I/1.2.A]

2.1.3. Definíció. Az (X, d) MT-ben az $a \in X$ elem $r > 0$ sugarú *környezetén* (avagy az $a \in X$ középpontú, $r > 0$ sugarú *gömbön*) a $B_r(a) = \{x \in X : d(x, a) < r\}$ halmazt értjük.

[MHH13, I/1.2.B]

2.1.4. Definíció. Legyen (X, d) MT. Amh. az $x \in X$ elem a $H \subset X$ halmaz

- *belső pontja*, ha x -nek van olyan környezete, amely csak H -beli elemeket tartalmaz. H belső pontjainak halmazát $\text{int}H$ jelöli.
- *külső pontja*, ha x -nek van olyan környezete, amely nem tartalmaz H -beli elemet. H külső pontjainak halmazát $\text{ext}H$ jelöli.
- *határpontja*, ha x -nek minden környezete tartalmaz H -beli és nem H -beli elemet is. H határpontjainak halmazát ∂H jelöli.

2.1.5. Definíció. Legyen (X, d) MT. Amh. a $H \subset X$ halmaz

- *nyílt*, ha minden eleme belső pont.
- *zárt*, ha a komplementere $H^C = X \setminus H$ nyílt halmaz.

[MHH13, I/1.2.C]

A következőkben gyakorlatilag az analízis, lásd az 5.1.Fejezetet, fogalmait vesszük át ebben az általános tárgyalásmódban.

Teljes metrikus tér. [MHH13, I/2.]

2.1.6. Definíció. Amh. az (X, d) MT-beli (x_n) sorozat

- *konvergens*, ha $\exists a \in X: d(x_n, a) \rightarrow 0$.
(Ha $\exists a \in X$ (a határérték), hogy $\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N}$, hogy $\forall n > N$ -re $x_n \in B_\varepsilon(a)$ (vagyis $d(x_n, a) < \varepsilon$).)
- *Cauchy-sorozat*, ha $d(x_n, x_m) \rightarrow 0$, ha $m > n, n \rightarrow \infty$.
(Ha $\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N}$, hogy $\forall m, n: m > n > N$ -re $d(x_n, x_m) < \varepsilon$.)

2.1.7. Definíció. Amh. az (X, d) MT *teljes metrikus tér* (TMT), ha minden Cauchy-sorozata konvergens.

[MHH13, I/2.2.A]

Ez a fogalom nagyon fontos! Előzőleg - a valós számok kapcsán - nagyon hozzá tud szokni az ember, hogy ha egy sorozat Cauchy, akkor konvergens, de ez általánosan már nem igaz. Az Olvasó nézze át az ehhez kapcsolódó megadott feladatokat.

Függvények folytonossága.

2.1.8. Definíció. Legyen $(X, d_X), (Y, d_Y)$ MT $D \subset X$. Amh. az $f : D \rightarrow Y$ fv. *folytonos* az $a \in D$ pontban, ha $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$, hogy ha $x \in D$ és $d_X(x, a) < \delta$, akkor $d_Y(f(x), f(a)) < \varepsilon$.

Amh. f folytonos, ha folytonos $\forall a \in D$ pontban.

2.1.9. Definíció. Legyen $(X, d_X), (Y, d_Y)$ MT $D \subset X$. Amh. az $f : D \rightarrow Y$ fv.

- *folytonos*, ha folytonos $\forall a \in D$ pontban.
- *Lipschitz-folytonos* (Lipschitzes), ha $\exists L \in \mathbb{R}$ (Lipschitz-állandó), hogy $d_Y(f(x), f(a)) \leq L d_X(x, a)$ teljesül $\forall x, y \in D$.
- *kontrakció*, ha Lipschitzes $q < 1$ Lipschitz-állandóval, melyet ebben az esetben kontrakciós állandónak nevezünk.

Banach-féle fixpont tétel. A következő tétel a fejezet "lelke", ez a 2.1.1. Példában bemutatott módszer általános verziója.

2.1.10. Tétel. (*Banach-féle fixpont tétel*)

Legyen X TMT. Ha $F : X \rightarrow X$ kontrakció a $q \in [0, 1)$ kontrakciós konstanssal, akkor

1. $\exists! x^* : F(x^*) = x^*$.
2. Az $x^{(k)} = F(x^{(k-1)})$, $x^{(0)} \in X$ tetszőleges, iterációra $x^{(k)} \rightarrow x^*$.
3. $\varepsilon^{(k)} = d(x^{(k)}, x^*) \leq q d(x^{(k-1)}, x^*) = q \varepsilon^{(k-1)}$.
4. $d(x^{(k)}, x^*) < \frac{q^k}{1-q} d(x^{(0)}, x^{(1)})$.

Bizonyítás. 1–2. Tekintsük a tételben szereplő iterációt! Ekkor $m > n \geq 0$ esetén

$$\begin{aligned}
 d(x^{(m)}, x^{(n)}) &\leq d(x^{(m)}, x^{(m-1)}) + d(x^{(m-1)}, x^{(m-2)}) + \dots + d(x^{(n+1)}, x^{(n)}) \leq \\
 &(q^{m-1} + \dots + q^n) d(x^{(1)}, x^{(0)}) \leq q^n (q^{m-n-1} + \dots + 1) d(x^{(1)}, x^{(0)}) < \\
 &q^n \left(\sum_{i=0}^{\infty} q^i \right) d(x^{(1)}, x^{(0)}) = \frac{q^n}{1-q} d(x^{(0)}, x^{(1)}) \rightarrow 0,
 \end{aligned}
 \tag{2.3}$$

ha $n \rightarrow \infty$ (amivel $m \rightarrow \infty$ is). Vagyis $(x^{(k)})$ Cauchy-sorozat. Kihhasználva X teljességét kapjuk, hogy konvergens is. Jelöljük a határértékét $\bar{x}$ -sal.

Tekintsük az $x^{(k)} = F(x^{(k-1)})$ iterációt és vegyük mindkét oldal limeszét!

Mivel F kontrakció, így folytonos is, tehát

$$\bar{x} = \lim x^{(k)} = \lim F(x^{(k-1)}) = F(\lim x^{(k-1)}) = F(\bar{x}),$$

ahonnan kapjuk, hogy $\bar{x}$ fixpontja F -nek.

Tfh. x^* fixpontja F -nek. Ekkor

$$d(\bar{x}, x^*) = d(F(\bar{x}), F(x^*)) \leq q d(\bar{x}, x^*),$$

ahonnan $\bar{x} = x^*$. Az egyetlen fixpontot inentől x^* -gal jelöljük.

$$3. \quad \varepsilon^{(k)} = d(x^{(k)}, x^*) \leq q d(x^{(k-1)}, F(x^*)) = q d(x^{(k-1)}, x^*) = q \varepsilon^{(k-1)}.$$

4. (2.3)-ból tudjuk, hogy $d(x^{(m)}, x^{(n)}) < \frac{q^n}{1-q} d(x^{(0)}, x^{(1)})$. Vegyük mindkét oldal limeszét $m \rightarrow \infty$, $n = k$ rögzített esetben! Ekkor d folytonossága miatt egyrészt

$$\lim_{m \rightarrow \infty} d(x^{(k)}, x^{(m)}) = d(x^{(k)}, \lim_{m \rightarrow \infty} x^{(m)}) = d(x^{(k)}, x^*),$$

másrészt

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{q^k}{1-q} d(x^{(0)}, x^{(1)}) = \frac{q^k}{1-q} d(x^{(0)}, x^{(1)}).$$

□

[MHH13, I/2.2.B]

2.1.2. Megoldás létezése és egyértelműsége

Az előkészületekkel készen vagyunk, rátérhetünk az alapkérdés megválaszolására. Ehhez az eddig már használt fogalmakat, mint pl. kezdetiérték probléma, pontosan definiáljuk.

2.1.11. Definíció. Legyen $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ tartomány és $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos függvény. Ekkor

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = f(t, y(t)) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \quad (\text{KÉP})$$

egyenletet, ahol $(t_0, y_0) \in \Omega$, *kezdetiérték problémának* nevezzük.

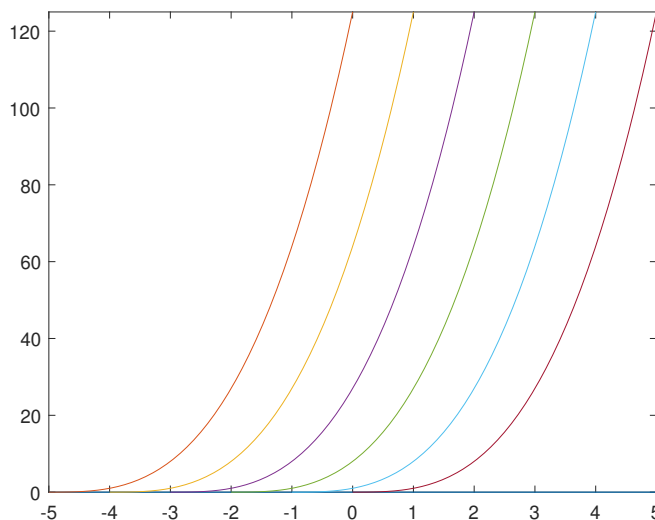
Figyelem, a definícióban feltettük, hogy a jobb oldal folytonos. Ez nem mindig teljesül, már a legalapvetőbb gyakorlati problémák esetében is előfordul nem folytonos jobboldallal rendelkező KÉP-pel modellezhető folyamat, de ezek legtöbbször szakaszosan folytonos jobboldallal rendelkeznek, amit a megfelelő intervallumokon külön-külön tudunk kezelni. Természetesen vannak olyan esetek is, amik ebbe a kategóriába sem esnek bele, de mi ezekkel most nem foglalkozunk.

Most megvizsgálunk két KÉP-át, ahol a megoldás létezése és egyértelmősége sérül.

2.1.12. Példa. Tekintsük az alábbi kezdetiérték problémát!

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = 3y^{\frac{2}{3}}(t) \\ y(t_0) = 0 \end{cases} \quad (2.4)$$

Megoldva a szétválasztható típusú differenciálegyenletet kapjuk, hogy $y(t) \equiv$



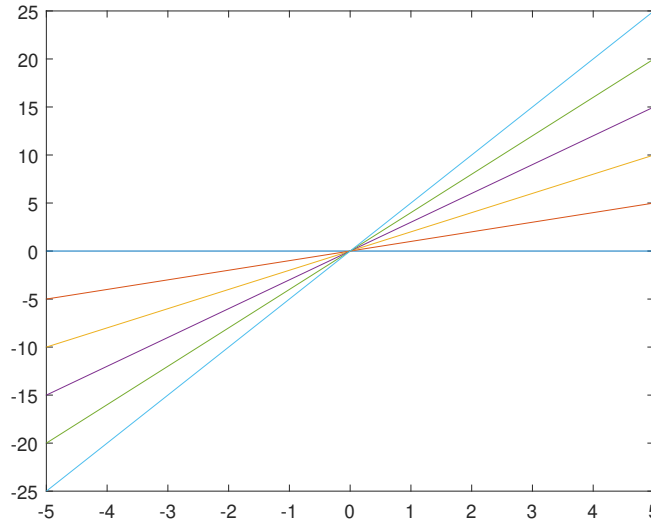
2.2. ábra. A (2.4) KÉP néhány megoldása.

0 vagy $y(t) = (t - c)^3$. Felhasználva a kezdetiértéket kapjuk, hogy $y(t) \equiv 0$ vagy $y(t) = t^3$. Ez már két megoldás, de jobban megvizsgálva kapjuk, hogy végtelen sok megoldás van, mert tetszőleges c értékig a t -tengelyen haladva, majd a $(t - c)^3$ függvényen továbbhaladva szintén megoldást kapunk.

2.1.13. Példa. Tekintsük az alábbi feladatot!

$$t\dot{y}(t) = y(t) \quad (2.5)$$

Megoldva a szétválasztható típusú differenciálegyenletet kapjuk, hogy $y(t) =$



2.3. ábra. A (2.5) egyenlet néhány megoldása, ha $y(0) = 0$.

ct. Ez azt jelenti, hogy ha $y(0) = 0$ kezdetiértéket csatolunk a differenciálegyenlethez, akkor végtelen sok megoldásunk lesz, ha pedig a $y(0) = c \neq 0$ kezdeti feltételt, akkor pedig nincs megoldás. Meg kell ugyanakkor jegyezzük, hogy (2.5) nincs KÉP alakban.

Az alábbi két feladat kidolgozását az Olvasóra bízunk.

2.1.14. Feladat. Oldjuk meg az alábbi kezdetiérték problémát!

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = 2\sqrt{|y(t)|} \\ y(t_0) = 0 \end{cases}$$

2.1.15. Feladat. Oldjuk meg az alábbi feladatot!

$$t\dot{y}(t) = -y(t) \quad (2.6)$$

Definiáljuk a korrekt kitűzésű feladat fogalmát.

2.1.16. Definíció. Amh. a KÉP *korrekt kitűzésű*, ha

1. létezik megoldása;
2. megoldása egyértelmű;
3. stabil: a megoldás folytonosan függ a bemenő adatoktól.

A harmadik tulajdonsággal kicsit később foglalkozunk, most az első kettőre fókuszálunk. Az tudható, hogy a KÉP-nek létezik megoldása, ez Peano tétele, amit bizonyítás nélkül közlünk.

2.1.17. Tétel. (*Peano*)

KÉP-nek létezik megoldása.

Amit bizonyítani fogunk az az, hogy bizonyos plusz feltételek mellett létezik és egyértelmű a KÉP megoldása. Ehhez a 2.1.1. Példában bemutatott technikát alkalmazzuk, de már az általános esetben, amit a 2.1.10. Tételben foglaltunk össze. Ez a tétel viszont fixpontokról állít valamit, tehát első lépésben át fogjuk írni a KÉP-et megfelelő alakra.

2.1.18. Lemma. *Tekintsük a*

$$y(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(s, y(s)) \, ds \quad (\text{INT})$$

integrálegyenletet. Ekkor KÉP és INT ekvivalensek a folytonosan differenciálható függvények körében.

Bizonyítás. Deriválva INT-et KÉP-et kapjuk, illetve integrálva KÉP-et t_0 -tól t -ig INT-et kapjuk. $\square$

Ez azt jelenti, hogy tekinthetjük INT-et KÉP helyett és ez már pontosan olyan alakú, amit szerettünk volna.

2.1.19. Tétel. (*Picard–Lindelöf*)

Tf. f a második változójában Lipschitzes, azaz $\exists L$, hogy

$$|f(t, y_1) - f(t, y_2)| \leq L |y_1 - y_2|$$

teljesül $\forall (t, y_i) \in \Omega$. Ekkor KÉP-nek létezik megoldása és az egyértelmű is.

Bizonyítás. Először tekintsünk egy $T = [a, b] \times [c, d] \subset \Omega$ nemelfajuló téglalapot (biztonsági téglalap), mely a belsejében tartalmazza a (t_0, y_0) pontot. Legyen $M = \max_T |f(t, y)|$.

Majd legyen $\varepsilon > 0$ olyan, hogy $[t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon] \times [y_0 - M\varepsilon, y_0 + M\varepsilon] \subset T$, továbbá $\varepsilon L = q < 1$.

Legyen $S = \{u \in C[t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon] : d_\infty(u, y_0) \leq M\varepsilon\}$. Tekintsük az $F : S \rightarrow C[t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]$, $F(u) = y_0 + \int_{t_0}^t f(s, u(s)) \, ds$ operátort. Ekkor

1. (S, d_∞) TMT, (ezt nem bizonyítjuk)

2. $F : S \rightarrow S$, hiszen legyen $u \in S$,

$$\begin{aligned} d_\infty(F(u), y_0) &= \max \left| y_0 + \int_{t_0}^t f(s, u(s)) \, ds - y_0 \right| = \max \left| \int_{t_0}^t f(s, u(s)) \, ds \right| \leq \\ &\max \left| \int_{t_0}^t |f(s, u(s))| \, ds \right| \leq \max \left| \int_{t_0}^t M \, ds \right| \leq M\varepsilon, \end{aligned}$$

3. F kontrakció, hiszen

$$\begin{aligned} d_\infty(F(u), F(v)) &= \max \left| y_0 + \int_{t_0}^t f(s, u(s)) \, ds - \left(y_0 + \int_{t_0}^t f(s, v(s)) \, ds \right) \right| = \\ &\max \left| \int_{t_0}^t f(s, u(s)) - f(s, v(s)) \, ds \right| \leq \max \left| \int_{t_0}^t |f(s, u(s)) - f(s, v(s))| \, ds \right| \leq \\ &\max \left| \int_{t_0}^t L d_\infty(u, v) \, ds \right| \leq \underbrace{L\varepsilon}_{=q < 1} d_\infty(u, v). \end{aligned}$$

Vagyis teljesülnek a Banach-féle fixpont tétel 2.1.10 feltételei, tehát $\exists! y^*$, hogy $F(y^*) = y^*$, azaz y^* az egyetlen megoldása INT-nek. Hozzáteve még, hogy $F(y^*)$ folytonosan differenciálható, tehát y^* is az, így használva Lemma 2.1.18-t kapjuk, hogy y^* az egyetlen megoldása KÉP-nek. $\square$

Nézzünk bele egy kicsit a részletekbe. Milyen iterációt is generálunk a bizonyítás folyamán? Ezt fogjuk megnézni egy egyszerű példán.

2.1.20. Példa. Tekintsük a következő KÉP-et!

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = y(t) \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Ennek megoldása természetesen nem okoz problémát, a megoldás $y(t) = e^t$, de itt most nem ez a cél. Elsőnek átírjuk ekvivalens integrálegyenletté:

$$y(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(s, y(s)) \, ds = 1 + \int_{t_0}^t y(s) \, ds,$$

majd ennek segítségével definiálunk egy iterációt:

$$\begin{cases} \dot{y}^{(0)}(t) \equiv y(0) = 1 \\ y^{(k+1)}(t) = 1 + \int_{t_0}^t y^{(k)}(t) \, ds \end{cases}$$

Ha néhány tagot kiszámolunk megsejthetjük, hogy

$$y^{(k)}(t) = 1 + t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \dots + \frac{t^k}{k!}$$

amit teljes indukcióval igazolhatunk, ezt az Olvasóra bízunk. Hátra van még annak igazolása, hogy ez a függvénysorozat a megoldáshoz, vagyis e^t -hez tart. Most már tudjuk, hogy ez attól is függhet, hogy milyen metrikát választunk. Hasonlóan a 2.1.19.Tétel bizonyításához, itt is a d_∞ mellett döntünk. Felhasználva e^t Taylor-sorát (5.1) kapjuk, hogy

$$d_\infty(e^t, y^{(k)}(t)) = \left| \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \right|.$$

Itt álljunk meg egy pillanatra! Nem mindegy, hogy egy véges intervallumon dolgozunk, vagy az egész $\mathbb{R}$ -en. Bármely véges intervallum esetén $\exists M > 0$, hogy

$$d_\infty(e^t, y^{(k)}(t)) \leq \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{M^n}{n!}.$$

A befejezéshez adunk egy kis segítséget, de az Olvasóra bízunk. Vegyük észre, hogy egy indextől kezdve:

$$\frac{M^n}{n!} \geq 2 \frac{M^{n+1}}{(n+1)!},$$

ami azt jelenti, hogy amit darabonként hozzáadogatunk, az legalább feleződik, ami azt is jelenti, hogy az utolsó hozzáadott értéke legalább annyi, mint az összes utána jövő összege.

Elviekben ez a példa azt is sugallja, hogy ha nem tudunk megoldani egy KÉP-et, akkor ezzel az úgynevezett *Picard iterációval* (mely az egyszerű iteráció egy speciális esete) közelíthetjük a megoldását. Ez sajnos csak elviekben van így, hiszen az esetek többségében az integrálás okozza azt, hogy nem tudjuk megoldani az adott feladatot, viszont a közelítő módszer lépésenként egy integrálást jelent. Vagyis ez egy elméleti eszköz, de annak kiváló.

2.1.21. Megjegyzés. Térjünk vissza az 2.1.12.Példához! A megoldás nem volt egyértelmű. Ebből a 2.1.19.Tétel miatt következik, hogy az egyenlet jobb oldala nem Lipschitzes (Miért? Az Olvasó gondolja meg!). Az Olvasó ellenőrizze le, hogy tényleg így van!

Térjünk vissza az 2.1.13.Példához! Itt ha $y(0) \neq 0$, akkor nincs megoldás. Miként viszonyul ez a 2.1.17.Tételhez?

Igaz-e, hogy ha a jobb oldal nem Lipschitzes, akkor több megoldás van? A válasz az, hogy nem igaz! Ennek igazolását az Olvasóra bízunk, segítségként a

$$\dot{y}(t) = y(t) \log |y(t)|$$

egyenletet ajánljuk a figyelmébe.

2.2. Stabilitás

A harmadik abban a listában, amiben a korrekt kitűzésű feladat tulajdonságait gyűjtöttük össze. Stabilitás: a kimenet (megoldás) folytonosan függ a bemenettől. Mit is jelent ez? Egyrészt világos, hogy a kezdeti érték része a bemenetnek, de a jobb oldal is! A folytonos függés első közelítésben úgy fogalmazható meg, hogy ha a bemenetet kicsit megváltoztatjuk, akkor a kimenet is csak kicsivel változik. Miért fontos ez? Emlékezzünk vissza, hogy a KÉP egy modellezési

folyamat végeredménye és mint ilyen, nem teljesen pontos, tehát lesz egy kis eltérés a modell és a valóság között. De ha a KÉP korrekt kitűzésű, akkor azok a KÉP-ek, amik "közel" vannak hozzá (ha jól modelleztünk akkor a valóság is ilyen) "közele" megoldásokat is szolgáltatnak. Vegyük észre, ha nem így lenne, akkor teljesen reménytelen lenne a helyzetünk, hiszen megoldanánk egy modellhez tartozó KÉP-et és fogalmunk sem lenne, hogy ez a megoldás hogy viszonyul a valósághoz: közel van hozzá vagy lehet, hogy mégsem?

A stabilitás tehát egy a gyakorlathoz kötődő fontos fogalom. A következőkben ezt járjuk körül.

Gronwall-egyenlőtlenségek. Ezek az egyenlőtlenségek gyakorlatilag egymásból "nőnek ki" és az alapot fogják szolgáltatni a végső stabilitási becsléshez. A bizonyításoknál a kulcs a korábban már használt beszorzásos trükk.

2.2.1. Lemma. Ha $u \in C[a, b] \cap C^1(a, b)$, $K \in \mathbb{R}$ és

$$\dot{u}(t) \leq Ku(t)$$

$\forall t \in (a, b)$, akkor

$$u(t) \leq u(a)e^{K(t-a)}$$

$\forall t \in [a, b]$.

Bizonyítás. Szorozva $e^{-Kt} > 0$ -vel és átrendezve:

$$\dot{u}(t)e^{-Kt} + u(t)(-Ke^{-Kt}) = (u(t)e^{-Kt})' \leq 0.$$

Vagyis $u(t)e^{-Kt}$ monoton csökkenő, tehát $u(a)e^{-Kt} \geq u(t)e^{-Kt} \forall t \in [a, b]$. $\square$

Ennek az integrálalakos verziója a következő.

2.2.2. Lemma. Ha $u \in C[a, b]$, $K > 0$ és

$$u(t) \leq g(t) = u(a) + K \int_a^t u(s) \, ds$$

$\forall t \in [a, b]$, akkor

$$u(t) \leq u(a)e^{K(t-a)}$$

$\forall t \in [a, b]$.

Bizonyítás. $g \in C[a, b] \cap C^1(a, b)$ és $\dot{g}(t) = Ku(t) \leq Kg(t) \forall t \in (a, b)$. Vagyis alkalmazhatjuk a Lemma 2.2.1-t g -re. Tehát $u(t) \leq g(t) \leq g(a)e^{K(t-a)} = u(a)e^{K(t-a)}$. $\square$

2.2.3. Lemma. Ha $u \in C[a, b]$, $K > 0$, $c \in C[a, b] \cap C^1(a, b)$ és

$$u(t) \leq g(t) = c(t) + K \int_a^t u(s) \, ds$$

$\forall t \in [a, b]$, akkor

$$u(t) \leq c(a)e^{K(t-a)} + \int_a^t \dot{c}(s)e^{K(t-s)} \, ds$$

$\forall t \in [a, b]$.

Bizonyítás. $g \in C[a, b] \cap C^1(a, b)$ és $\dot{g}(t) = \dot{c}(t) + Ku(t) \leq \dot{c}(t) + Kg(t) \forall t \in (a, b)$. Szorozva $e^{-Kt} > 0$ -vel és átrendezve:

$$\dot{g}(t)e^{-Kt} + g(t)(-Ke^{-Kt}) = (g(t)e^{-Kt})' \leq \dot{c}(t)e^{-Kt}.$$

Integrálva:

$$\int_a^t [(g(t)e^{-Kt})']|_{t=s} \, ds \leq \int_a^t \dot{c}(s)e^{-Ks} \, ds.$$

A bal oldal: $g(t)e^{-Kt} - g(a)e^{-Ka} = g(t)e^{-Kt} - c(a)e^{-Ka}$, végül megszorozva e^{Kt} -vel és átrendezve:

$$u(t) \leq g(t) \leq c(a)e^{K(t-a)} + \int_a^t \dot{c}(s)e^{K(t-s)} \, ds.$$

$\square$

Nekünk a későbbiekben ennek csak egy speciális esetére lesz szükségünk, ami a következő.

2.2.4. Következmény. Ha $c(t) = \alpha + \beta(t - a)$, vagyis:

$$u(t) \leq \alpha + \beta(t - a) + K \int_a^t u(s) \, ds$$

$\forall t \in [a, b]$, akkor (kiintegrálva a jobb oldalt, amit az Olvasóra bízunk):

$$u(t) \leq \alpha e^{K(t-a)} + \frac{\beta}{K}(e^{K(t-a)} - 1).$$

Egyértelműség és stabilitás. Elsőnek megint adunk egy egyértelműségi bizonyítást, de most másképp, egy Gronwall-egyenlőtlenség segítségével fogjuk bizonyítani.

2.2.5. Lemma. Tekintsük az alábbi kezdetiérték problémát!

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = f(t, y(t)) \\ y(t_0) = y_0, \end{cases} \quad (\text{KÉP})$$

ahol f folytonos, és a második változójában Lipschitzes. Ekkor KÉP megoldása egyértelmű.

Bizonyítás. Ha két megoldásunk lenne $y^{(1)}$ és $y^{(2)}$, akkor az ekvivalens integrálegyenletet használva:

$$\begin{aligned} |y^{(1)}(t) - y^{(2)}(t)| &= \left| y_0 + \int_{t_0}^t f(s, y^{(1)}(s)) \, ds - y_0 - \int_{t_0}^t f(s, y^{(2)}(s)) \, ds \right| \leq \\ &= \int_{t_0}^t |f(s, y^{(1)}(s)) - f(s, y^{(2)}(s))| \, ds \leq \int_{t_0}^t L |y^{(1)}(s) - y^{(2)}(s)| \, ds. \end{aligned}$$

Legyen $u(t) = |y^{(1)}(t) - y^{(2)}(t)|$, ekkor:

$$u(t) \leq L \int_{t_0}^t u(s) \, ds.$$

Alkalmazhatjuk a Lemma 2.2.2-t: $0 \leq u(t) \leq u(t_0)e^{L(t-t_0)} = 0$, mivel $u(t_0) = 0$. Tehát $u \equiv 0$, vagyis $y^{(1)}(t) = y^{(2)}(t)$. $\square$

Most következik a stabilitási tétel, mely szintén Peano nevéhez kötődik.

2.2.6. Tétel. (Peano)

Tekintsük a következő két KÉP-et!

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = f_1(t, y(t)) \\ y(t_0) = y_{10}, \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{y}(t) = f_2(t, y(t)) \\ y(t_0) = y_{20}, \end{cases}$$

ahol feltesszük, hogy

- $|y_{10} - y_{20}| \leq \sigma$,
- f_1 és f_2 folytonosak, és a második változójukban ugyanazzal az L konstanssal Lipschitzesek, továbbá
- $\exists \delta \geq 0 : |f_1(t, p) - f_2(t, p)| \leq \delta \quad \forall (t, p) \in \Omega$.

Ekkor az $y^{(1)} : I_1 \rightarrow \mathbb{R}$, $y^{(2)} : I_2 \rightarrow \mathbb{R}$, $J = I_1 \cap I_2 \neq \emptyset$ megoldásokra:

$$|y^{(1)}(t) - y^{(2)}(t)| \leq \sigma e^{L|t-t_0|} + \frac{\delta}{L}(e^{L|t-t_0|} - 1)$$

$\forall t \in J$.

Bizonyítás. $t \geq t_0$ eset: (A másik eset hasonló.) Az ekvivalens integrálegyenletet használva:

$$\begin{aligned} |y^{(1)}(t) - y^{(2)}(t)| &= |y_{10} + \int_{t_0}^t f_1(s, y^{(1)}(s)) \, ds - y_{20} - \int_{t_0}^t f_2(s, y^{(2)}(s)) \, ds| \leq \\ &|y_{10} - y_{20}| + \left| \int_{t_0}^t f_1(s, y^{(1)}(s)) \, ds - \int_{t_0}^t f_2(s, y^{(2)}(s)) \, ds \right| \leq \\ &\sigma + \int_{t_0}^t |f_1(s, y^{(1)}(s)) - f_2(s, y^{(2)}(s))| \, ds \leq \\ &\sigma + \int_{t_0}^t |f_1(s, y^{(1)}(s)) - f_1(s, y^{(2)}(s))| \, ds + \int_{t_0}^t |f_1(s, y^{(2)}(s)) - f_2(s, y^{(2)}(s))| \, ds \leq \\ &\sigma + L \int_{t_0}^t |y^{(1)}(s) - y^{(2)}(s)| \, ds + \delta(t - t_0). \end{aligned}$$

Legyen $u(t) = |y^{(1)}(t) - y^{(2)}(t)|$, ekkor:

$$u(t) \leq \sigma + \delta(t - t_0) + L \int_{t_0}^t u(s) \, ds,$$

amire alkalmazhatjuk a Következmény 2.2.4-et, ami a kívánt egyenlőtlenséget adja. $\square$

2.2.7. Megjegyzés. Ha a két egyenletet úgy fogjuk fel, hogy egyik a valóság, a másik a mi közelítésünk, akkor $|y_{10} - y_{20}| \leq \sigma$ jelentése a kezdeti hiba, ami a mérések pontatlanságából származik. $\exists \delta \geq 0 : |f_1(t, p) - f_2(t, p)| \leq \delta$ jelentése pedig az, hogy a törvény, amit használunk szintén tartalmaz mérésen alapuló konstansokat, amik csak „kicsit” rontják el az egyenlet jobb oldalát.

Az egyenlőtlenség pedig azt mondja, hogy a megoldás és a közelítésünk különbsége (hiba) legfeljebb exponenciálisan növekszik az időben.

Ez az a tulajdonság, melyet elsőre még csak közelítőlegesen úgy fogalmaztunk, hogy ha a bemenő adatokat „kicsit” megváltoztatjuk, akkor a megoldás is csak „kicsit” fog megváltozni. Most már pontosan értjük, hogy mit jelent a megoldásnak a bemenő paraméterektől való folytonos függése, más szóval stabilitása.

3. fejezet

Kezdetiérték problémák numerikus megoldási módszerei

A korábbi fejezetekben először bizonyos típusok megoldási módszereivel foglalkoztunk, majd mikor láttuk ennek a kvantitatív megközelítésnek a hátrányait, átváltottunk a kvalitatív megközelítésre. Ezt követte egy elméleti rész. Most visszatérünk a kvantitatív megközelítéshez. Természetesen kicsit változtatunk az eredeti terven. Nem célunk megoldási receptek, megoldóképletek előállítása, most megelégszünk a megoldás közelítésével. Ez valójában nem lemondás valami tökéletesnek az eléréséről, azt már a modellezés folyamán többé kevésbé meg kell tennünk. Ráadásul - elviekben - teszőleges pontosságú közelítést fogunk tudni előállítani.

3.1. Numerikus megoldási módszerek – bevezető

Az alábbiakban bemutatjuk a legegyszerűbb módszereket (megjegyezzük, hogy mi itt csak úgynevezett *egylépéses módszerekkel* foglalkozunk, de ezen kívül vannak még más módszercsaládok is) és tárgyaljuk a felvetődő alapvető gyakorlati kérdéseket. A későbbiekben precízen bebizonyítjuk, hogy a bevezetett módszerek a megoldáshoz tartó sorozatot állítanak elő (bizonyos feltételek teljesülése mellett).

3.1.1. Numerikus módszerek konstruálása

Tekintsük az alábbi kezdetiérték problémát!

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = f(t, y(t)), & t \in (t_0, T] \\ y(t_0) = y_0, \end{cases} \quad (\text{KÉP})$$

ahol f folytonos, és a második változójában Lipschitzes. Tudjuk, hogy ez esetben a megoldás létezik és egyértelmű, 2.1.19.Tétel. Figyelem, most csak egy véges intervallumon dolgozunk!

Először három alapvető módszert fogunk bevezetni. Ezek kapcsán már gyakorlatilag majdnem minden fontos kérdés tárgyalható, a komplexebb módszerek tárgyalása technikailag jelent csak nagyobb kihívást, az elvek ugyanazok maradnak.

Az explicit-Euler módszer. Röviden EE. Vesszük egy ekvidisztáns felosztását a $[t_0, T]$ intervallumnak. A lépésközt jelöljük h -val, az intervallumot N részre osztva kapjuk, hogy $t_n = t_0 + nh$, $n = 0, \dots, N$.

Az $y(t)$ megoldást csak ezen osztópontokban közelítjük, és ezen közelítésekből állítjuk elő az $\mathbf{y}^h = (y_0^h, y_1^h, \dots, y_N^h) \in \mathbb{R}^{N+1}$ vektort, tehát szándékaink szerint $y_n^h \sim y(t_n)$, $n = 0, \dots, N$, ahol $y(t)$ a KÉP megoldása. A módszer pedig az $\mathbf{y}^h$ vektor előállítására a következő:

$$\begin{cases} y_0^h = y_0, & n = 0 \\ y_n^h = y_{n-1}^h + hf(t_{n-1}, y_{n-1}^h), & n = 1, \dots, N \end{cases} \quad (\text{explicit-Euler módszer})$$

Geometriailag úgy képzelhetjük el, hogy minden egyes lépésben érintő-irányban lépünk tovább. Másik megközelítés szerint tekintsük a következő közelítést:

$$\frac{y(t_n) - y(t_{n-1})}{h} \approx \dot{y}(t_{n-1}) = f(t_{n-1}, y(t_{n-1})),$$

ahol a deriváltat közelítettük egy különbségi hányadossal. Majd elhagyva a deriváltat átrendezéssel kapjuk az (explicit-Euler módszer)-t. Tehát az eszme az, hogy az egyenletet közelítjük. Vegyük észre, hogy a kapott módszer egy rekurzió, mégpedig explicit, tehát szépen végig tudunk lépkedni az y_0^h kezdőértékről egészen az utolsó y_N^h tagig.

Az implicit-Euler módszer. Röviden IE. Itt az $\mathbf{y}^h$ vektor előállítására a következő rekurziót alkalmazzuk.

$$\begin{cases} y_0^h = y_0, & n = 0 \\ y_n^h = y_{n-1}^h + hf(t_n, y_n^h), & n = 1, \dots, N \end{cases} \quad (\text{implicit-Euler módszer})$$

Ez a módszer annyiban különbözik az EE-től, hogy nem az aktuális meredekség mentén lépünk tovább, hanem úgy lépünk, hogy a beérkezési helyen vett meredekség irányából érkezzünk. A másik interpretáció szerint:

$$\frac{y(t_n) - y(t_{n-1})}{h} \approx \dot{y}(t_n) = f(t_n, y(t_n)),$$

ahonnan átrendezéssel kapjuk (implicit-Euler módszer)-t. Ez a rekurzió viszont implicit, y_n^h nincs kifejezve, hanem minden lépésben egy egyenletünk van rá, amit meg kell oldanunk.

A Trapéz-módszer. Röviden csak T. Ez a módszer szintén implicit, az előző két módszer kombinálásaként lehet interpretálni.

$$\begin{cases} y_0^h = y_0, & n = 0 \\ y_n^h = y_{n-1}^h + \frac{h}{2} (f(t_{n-1}, y_{n-1}^h) + f(t_n, y_n^h)), & n = 1, \dots, N \end{cases} \quad (\text{Trapéz-módszer})$$

Mindhárom eddigi módszer osztozik abban a tulajdonságban, hogy a következő érték – azaz y_n^h – kiszámításához csak a t_{n-1} , h és y_{n-1}^h értékeket használja fel. Az ilyen módszereket *egylépéses módszereknek* nevezzük.

Vizsgáljuk meg a fenti módszerek működését néhány konkrét kezdetiérték problémán!

3.1.1. Példa. Elsőként tekintsük az ún. *teszt-egyenletet*! (Ez korábban már előfordult, lásd (1.1.2).Példa.) Legyen $\lambda \in \mathbb{R}$ tetszőleges. Megjegyezzük, hogy lehetne tetszőleges komplex szám is.

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = \lambda y(t), & t \in (0, T] \\ y(0) = 1 \end{cases} \quad (\text{teszt-egyenlet})$$

A megoldás $y(t) = e^{\lambda t}$.

Ekkor az EE a következő módon működik.

$$y_n^h = y_{n-1}^h + h\lambda y_{n-1}^h = (1 + h\lambda)y_{n-1}^h = \dots = (1 + h\lambda)^n y_0^h = (1 + h\lambda)^n.$$

Hasonlítsuk össze a megoldás végpontban felvett értékét $y(T) = e^{\lambda T}$ és a módszer által szolgáltatott közelítést $y_N^h = (1 + h\lambda)^N = (1 + \frac{T\lambda}{N})^N$. Tudjuk, hogy ha $N \rightarrow \infty$, akkor $(1 + \frac{T\lambda}{N})^N \rightarrow e^{\lambda T}$, vagyis ha a felosztást sűrítjük, akkor az EE által kapott közelítés tart a pontos értékhez. Ez egy jó hír, erre az egyenletre ez a módszer tetszőleges pontosságú közelítést tud előállítani.

Az IE a következő módon működik.

$$y_n^h = y_{n-1}^h + h\lambda y_n^h,$$

amiből - a teszt-egyenlet egyszerű volta miatt - ki tudjuk fejezni az ismeretlent.

$$y_n^h = \frac{1}{1 - h\lambda} y_{n-1}^h = \dots = \left(\frac{1}{1 - h\lambda} \right)^n y_0^h = \left(\frac{1}{1 - h\lambda} \right)^n.$$

Mivel $(1 - \frac{T\lambda}{N})^N \rightarrow e^{-\lambda T}$, ha $N \rightarrow \infty$, így az IE által kapott közelítés is tart a pontos értékhez.

A T a következő módon működik.

$$y_n^h = y_{n-1}^h + \frac{h}{2} (\lambda y_{n-1}^h + \lambda y_n^h),$$

amiből szintén ki tudjuk fejezni az ismeretlent.

$$y_n^h = \frac{1 + \frac{h\lambda}{2}}{1 - \frac{h\lambda}{2}} y_{n-1}^h = \dots = \left(\frac{1 + \frac{h\lambda}{2}}{1 - \frac{h\lambda}{2}} \right)^n y_0^h = \left(\frac{1 + \frac{h\lambda}{2}}{1 - \frac{h\lambda}{2}} \right)^n.$$

Mivel

$$\frac{\left(1 + \frac{T\lambda}{2N}\right)^N}{\left(1 - \frac{T\lambda}{2N}\right)^N} \rightarrow \frac{e^{\frac{T\lambda}{2}}}{e^{-\frac{T\lambda}{2}}} = e^{\lambda T},$$

ha $N \rightarrow \infty$, így a T által kapott közelítés is tart a pontos értékhez.

A teszt-egyenlet olyan egyszerű, hogy mindhárom esetben vissza lehetett fejteni a rekurziót, így a módszerek realizálásához nem volt szükség számítógépre. De ebből a szempontból ez kivételes eset volt, legtöbbször a számítógép használata nem küszöbölhető ki.

3.1.2. Példa. Tekintsük a következő KÉP-et!

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = -y^2(t), & t \in (1, T] \\ y(1) = 1. \end{cases}$$

A megoldás $y(t) = \frac{1}{t}$.

Az EE alkalmazása a következő rekurziót jelenti.

$$y_n^h = y_{n-1}^h - h (y_{n-1}^h)^2.$$

Ennek a visszafejtése már koránt sem olyan egyszerű, mint az előző példa esetében. Adja magát, hogy számítógépet használjunk.

Ennél is több kérdést vet fel az IE alkalmazása.

$$y_n^h = y_{n-1}^h - h (y_n^h)^2.$$

Ebből ki tudjuk fejezni az ismeretlent.

$$y_n^h = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 4h y_{n-1}^h}}{2h}.$$

Ennek a kézzel való visszafejtésére már nem is gondolunk, ráadásul egy újabb problémával is szembe kell nézzünk. Miszerint a $\pm$ -ból melyiket válasszuk? Az Olvasó indokolja meg, hogy a $+$ -t!

Ez azt jelenti, hogy az ismeretlen kifejezése már ebben az egyszerű esetben is technikai nehézséget, továbbá meggondolnivalót foglal magában.

A T alkalmazását az Olvasóra bízunk.

3.1.3. Feladat. Az előző feladatnak az ikertestvére a következő. Legyen $T \in (-1, 0)$ egy rögzített szám.

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = -y^2(t), & t \in (-1, T] \\ y(-1) = -1. \end{cases}$$

A megoldás ez esetben is $y(t) = \frac{1}{t}$. Ennek a példának a kidolgozását az Olvasóra bízunk.

3.1.4. Példa. Tekintsük a következő KÉP-et!

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = e^{-y(t)}, & t \in (1, T] \\ y(1) = 0. \end{cases}$$

A megoldás $y(t) = \ln t$.

Az EE alkalmazása a következő rekurziót jelenti.

$$y_n^h = y_{n-1}^h + h e^{-y_{n-1}^h}.$$

Ennek megoldása számítógépet igényel.

Az IE alkalmazása a következő rekurziót jelenti.

$$y_n^h = y_{n-1}^h + h e^{-y_n^h}.$$

Ebből kéne y_n^h -t kifejezni, ugyanakkor ez lehetetlen! Az implicitiségből fakadó probléma itt is előkerül.

T alkalmazásakor hasonló problémával találjuk szemben magunkat.

3.1.2. Az implicitiség kezelése

Az előzőekben azzal szembesültünk, hogy egyrészt a számítógép alkalmazása gyakorlatilag kikerülhetetlen, másrészt implicit módszer alkalmazása esetében előfordulhat, hogy olyan (nemlineáris) egyenletet kéne megoldanunk (ráadásul minden lépésben), amire nem vagyunk képesek. Ez látszólag azt sugallja, hogy el kell felejtünk az implicit módszereket.

Mielőtt így döntenénk, tegyük fel a következő kérdést. Van-e valamilyen összehasonlítás, ami azt mutatja, hogy az implicit módszerek jobbak valamilyen szempontból, mint az explicit módszerek? Ha igen (láttni fogjuk, hogy igen), akkor majd elkezdünk foglalkozni az implicitégi probléma kezelésével!

Explicit vs implicit.

3.1.5. Példa. Térjünk vissza a teszt-egyenlet vizsgálatára! Legyen most $\lambda = -100$ és $T = 1$, tehát

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = -100y(t), & t \in (0, 1] \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

A megoldás $y(t) = e^{-100t}$ és $y(1) = e^{-100} \approx 0$.

Az EE esetében azt kaptuk, hogy

$$y_N^h = \left(1 + \frac{-100}{N}\right)^N.$$

Legyen $N = 25$, tehát a lépésköz $h = \frac{1}{25}$! Ekkor $y_{25}^h = (-3)^{25}$, ami korántsem közelíti jól az $y(1) \approx 0$ értéket, ráadásul negatív!

Legyen $N = 49$, vagyis a lépésköz $h = \frac{1}{49}$! Ekkor $y_{49}^h \approx -7.1$, ami még mindig rossz közelítés, ráadásul szintén negatív.

Legyen $N = 50$! Ekkor $y_n^h = (-1)^n$, $n = 0, 1, \dots, 50$, ami szintén nem tekinthető jó közelítésnek.

Az Olvasóra bízunk annak meggondolását, hogy $|y_n^h| < |y_{n-1}^h|$ teljesüléséhez (ami itt egy természetes elvárás) N -et úgy kell megválasztanunk, hogy $N > 50$, továbbá ha azt is szeretnénk, hogy pozitív értékeket kapjunk, akkor úgy, hogy $N > 100$. Ha $N < 100$, akkor a numerikus közelítés oszcillál.

Ezzel ellentétben az IE meglepően jó közelítést ad durva felosztás esetében is:

$$y_N^h = \frac{1}{\left(1 + \frac{100}{N}\right)^N},$$

mely például $N = 10$ esetében $y_{10}^h \approx 3.8554e - 011$. Ami azt jelenti, hogy lényegesen kevesebb lépéssel is jó közelítést tudunk adni.

Mi a tanulság ebből? Gondoljunk egy olyan KÉP-re, melynek megoldását nem tudjuk zárt alakban megadni és a numerikus módszereink alkalmazásához nem elegendő papír+ceruza, tehát már az EE esetében is számítógéphez kell folyamodjunk. Egy módszer költsége nagyjából úgy számítható ki, hogy:

$$\text{lépések száma} \cdot \text{lépésenkénti költség}.$$

Láttuk, hogy az előző példában az EE esetében a lépések számát az IE lépésszámának sokszorosának kellett választani az elfogadható közelítés eléréséhez. Tehát ha valami módon sikerülne az implicitég problémáját kezelni (mégpedig relatíve olcsón, ami azt jelenti, hogy a lépésenkénti költség nem lehet nagy), akkor sok esetben az implicit módszerek lényegesen hatékonyabban működnének, mint explicit társaik.

Az alapötlet az, hogy a lépésenként megoldandó nemlineáris egyenletet nem megoldjuk - hiszen ez sokszor lehetetlen - hanem csak közelítjük a

megoldását. A numerikus módszerünk eleve vét valamekkora hibát lépésenként, így azzal, hogy erre ráakódik még egy kis hiba, az nem okoz gondot. Persze ez a ráakódó hiba nem szabad, hogy túl nagy legyen.

Most áttekintjük a legalapvetőbb módszereket, melyek alkalmasak egyenletek megoldásának közelítésére.

Egyszerű iteráció. Ez a módszer a Banach-féle fixpont tételen alapul, lásd Tétel 2.1.10. Ennek állítását itt is megismételjük.

Legyen $X \neq \emptyset$ TMT. Ha $F : X \rightarrow X$ kontrakció a $q \in [0, 1)$ kontrakciós állandóval, akkor

1. $\exists! x^*: F(x^*) = x^*$.
2. Az $x^{(k)} = F(x^{(k-1)})$, $x^{(0)} \in X$ tetszőleges, iterációra $x^{(k)} \rightarrow x^*$.
3. $\varepsilon^{(k)} = d(x^{(k)}, x^*) \leq q d(x^{(k-1)}, x^*) = q \varepsilon^{(k-1)}$.
4. $d(x^{(k)}, x^*) < \frac{q^k}{1-q} d(x^{(0)}, x^{(1)})$.

Ez természetesen egy elméleti eredmény. Nekünk nem áll módunkban végtelen sok iterációs lépést tenni, viszont nem is kell! Az egyszerű iteráció lineárisan konvergál, tehát ha q elég kicsi és a fixpont közeléből indítjuk az iterációt, akkor pár lépésben elegendően közel kerülünk a fixponthoz.

Most megvizsgálunk az előzőekben szerepelt példák közül néhányat. Megjegyezzük, hogy az 3.1.2.Példa, 3.1.3.Feladat és a 3.1.4.Példa esetében az EE (és az explicit módszerek általában) jól működnek, tehát nem szükséges implicit módszert választani. Viszont ezeken a példákön jól be lehet mutatni az egyszerű iteráció működését.

3.1.6. Példa. Tekintsük az 3.1.2.Példát! Itt az IE alkalmazása a következőt jelentette.

$$y_n^h = y_{n-1}^h - h (y_n^h)^2,$$

amiből ki lehetett fejezni az ismeretlent, de mi most más utat választunk.

Legyen $X = ([0, y_{n-1}^h], |\cdot|)$, ami TMT. Legyen továbbá $F(x) = y_{n-1}^h - hx^2$. Ekkor $h, y_{n-1}^h \leq 1$ esetén $F : X \rightarrow X$, hiszen

$$0 \leq F(x) = y_{n-1}^h - hx^2 \leq y_{n-1}^h.$$

Vegyük észre, hogy $y_{n-1}^h \leq 1$ teljesül, ha $h < 1$ és a lépésközt mi választhatjuk meg! Minél kisebb a lépésköz, annál több lépést kell tennünk, növelve a költséget, viszont a kapott megszorítás egyáltalán nem erős.

Továbbá, ha $h < \frac{1}{2}$ (ami még szintén nem erős megszorítás), akkor F kontrakció, mert

$$\begin{aligned} d(F(x), F(y)) &= |y_{n-1}^h - hx^2 - (y_{n-1}^h - hy^2)| = \\ &= h|x + y||x - y| \leq 2hy_{n-1}^h|x - y| \leq 2h d(x, y), \end{aligned}$$

vagyis q -t választhatjuk $2h$ -nak. Tehát minél kisebb h , annál gyorsabban konvergál az iteráció, viszont a kicsi lépésköznek is megvan a hátránya. A konklúzió az, hogy h csökkentése kevesebb "belső" iterációs lépést igényel, de több "külső" lépést. A költség a kettő szorzata, tehát kompromisszumot kell találnunk.

További kérdés, hogy honnan indítsuk az iterációt. Ha h elég kicsi, akkor y_{n-1}^h és a keresett y_n^h közel vannak egymáshoz, tehát kézenfekvő, hogy y_{n-1}^h legyen az iteráció kezdőértéke. Tehát a "belső" iteráció ekkor

$$\begin{cases} (y_n^h)^{(k)} = y_{n-1}^h - h \left((y_n^h)^{(k-1)} \right)^2 \\ (y_n^h)^{(0)} = y_{n-1}^h. \end{cases}$$

Habár általános érvényű szabály nincs, de általában igaz az, hogy 5-nél több egyszerű iterációs lépést nem érdemes tenni. Ha így nem kapnánk megfelelő eredményt, akkor inkább h -t kell csökkenteni.

Ha például a példánkban $h = 0.05$ választással élünk, akkor iterációs lépésenként legalább tizedelődik a hiba. A kezdeti hibáról tudjuk, hogy kisebb, mint 1 (ami egy nagyon-nagyon durva felső becslés), akkor 5 iterációs lépés után a hiba kisebb lesz, mint $1e-5$ (ami szintén nagyon-nagyon durva felső becslés).

3.1.7. Példa. A 3.1.3.Feladat kidolgozását az Olvasóra bízuk.

3.1.8. Példa. Tekintsük 3.1.4.Példát! Az IE alkalmazása a következő rekurziót jelentette.

$$y_n^h = y_{n-1}^h + h e^{-y_n^h}.$$

Ebben az esetben nem is állt módunkban y_n^h kifejezése, tehát a megoldást eleve csak közelíthetjük.

Legyen $X = ([0, \infty), |\cdot|)$, ami TMT. Legyen továbbá $F(x) = y_{n-1}^h + he^{-x}$. Ekkor $y_{n-1}^h \geq 0$ esetén (ami teljesül, az Olvasó gondolja meg, hogy miért) $F : X \rightarrow X$, továbbá, ha $h < 1$, akkor F kontrakció, mert a Lagrange-féle középérték tétel szerint $\exists w \in (x, y)$:

$$e^{-x} - e^{-y} = F'(w)(x - y) = -e^{-w}(x - y),$$

ahol tudjuk, hogy $|-e^{-w}| \leq 1$, tehát

$$\begin{aligned} d(F(x), F(y)) &= |y_{n-1}^h - he^{-x} - (y_{n-1}^h - he^{-y})| = \\ &= h|e^{-x} - e^{-y}| \leq h|x - y| \leq h d(x, y), \end{aligned}$$

vagyis q -t választhatjuk h -nak.

Általában nem ellenőrizzük le a Banach-féle fixpont tétel feltételeit, ez ugyanis sokszor vagy nehézségekbe ütközik, vagy bizonyos esetekben nem is lehetséges. Alkalmazzuk az egyszerű iterációt, és ha nem kapnánk megfelelő eredményt, akkor csökkentjük a lépésközt.

Sajnos az egyszerű iteráció alkalmazása hátrányokkal jár, mint ezt a következő példa mutatja.

3.1.9. Példa. Térjünk vissza a teszt-egyenlet vizsgálatára a $\lambda = -100$ esetben!

Az IE esetében azt kaptuk, hogy

$$y_n^h = y_{n-1}^h - 100hy_n^h,$$

amiből ki tudnánk fejezni az ismeretlent, de most nem ezt tesszük, hanem egyszerű iterációt alkalmazunk.

Tekintsük az $F(x) = y_{n-1}^h - 100hx$ leképezést. Ez esetben a kontrakciófeltétel azt jelenti, hogy

$$|y_{n-1}^h - 100hx - (y_{n-1}^h - 100hy)| = 100h|x - y|,$$

mely $h < \frac{1}{100}$ esetében teljesül. Ráadásul érdemes lenne ennél lényegesen kisebbnek választani h -t, hiszen csak így tudnánk az egyszerű iteráció sebességét feltornászni a megfelelő szintre. Ez pedig mindent tönkretesz, az IE-t pont azért választanánk, hogy a lépésszámot csökkentsük, hiszen ilyen lépésközzel már az EE is megfelelő eredményt adna.

Megjegyezzük, hogy ez nem jelenti azt, hogy minden esetben el kell tekinteni az egyszerű iteráció alkalmazásától, de van, ahol igen.

Ez azt jelenti, hogy más lehetőségek után kell nézzünk. Ilyen a következő.

Newton-iteráció. Ennek lényegét a következő tételben foglaljuk össze.

3.1.10. Tétel. Legyen $f \in C^2(a, b)$, valamint $f'(x) \neq 0, \forall x \in (a, b)$. Legyen továbbá $x^* \in (a, b)$ gyöke f -nek, vagyis $f(x^*) = 0$. Tekintsük az

$$x^{(k)} = x^{(k-1)} - \frac{f(x^{(k-1)})}{f'(x^{(k-1)})} \quad (\text{Newton-iteráció})$$

iterációt, ahol a kezdőértékre igaz az, hogy $|x^{(0)} - x^*| < r$, ahol

$$r = \min \left\{ \frac{2 \min_{x \in [a, b]} |f'(x)|}{\max_{x \in [a, b]} |f''(x)|}, |a - x^*|, |b - x^*| \right\}.$$

Ekkor $x^{(k)} \rightarrow x^*$ és a konvergencia kvadratikus.

Bizonyítás. Jelöljük a hibát a következőképp: $\varepsilon^{(k)} := x^{(k)} - x^*$. Taylor-sorfejtést alkalmazunk. $\exists \xi_k \in (a, b)$, hogy

$$0 = f(x^*) = f(x^{(k-1)}) + f'(x^{(k-1)})(x^* - x^{(k-1)}) + \frac{f''(\xi_k)}{2!}(x^* - x^{(k-1)})^2,$$

melyet átrendezve kapjuk, hogy

$$\varepsilon^{(k)} = x^{(k)} - x^* = x^{(k-1)} - \frac{f(x^{(k-1)})}{f'(x^{(k-1)})} - x^* = \frac{f''(\xi_k)}{2f'(x^{(k-1)})} (\varepsilon^{(k-1)})^2,$$

tehát

$$|\varepsilon^{(k)}| \leq \frac{\max_{x \in [a, b]} |f''(x)|}{2 \min_{x \in [a, b]} |f'(x)|} |\varepsilon^{(k-1)}|^2.$$

A kezdőpont választásából pedig teljes indukcióval következik, hogy

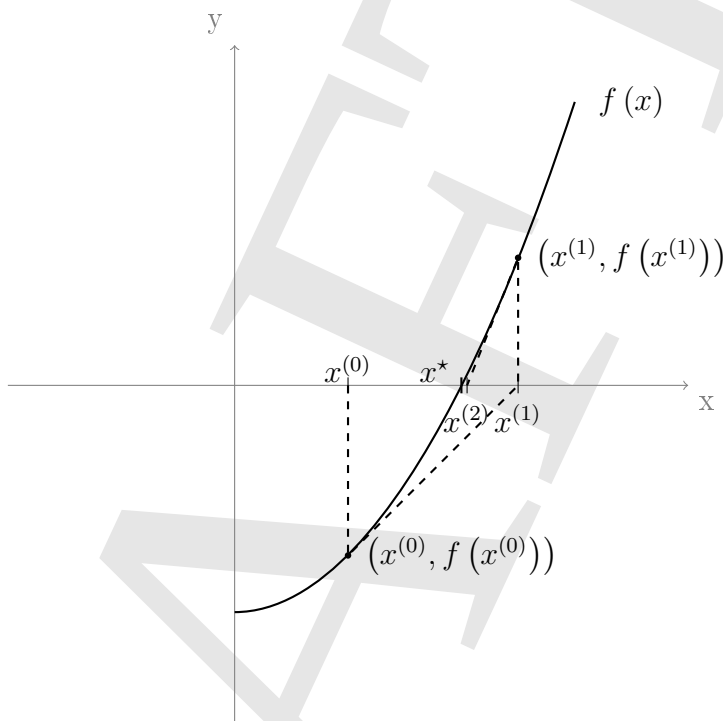
$$|\varepsilon^{(k)}| \leq \frac{\max_{x \in [a, b]} |f''(x)|}{2 \min_{x \in [a, b]} |f'(x)|} |\varepsilon^{(k-1)}|^2 < |\varepsilon^{(k-1)}| < r,$$

illetve

$$|\varepsilon^{(k)}| \leq \frac{1}{r} |\varepsilon^{(k-1)}|^2 \leq \dots \leq r \left(\frac{|\varepsilon^{(0)}|}{r} \right)^{2^k}.$$

□

3.1.11. Megjegyzés. • A Newton-iteráció egy szemléletes geometriai jelentéssel bír. Mi ez a geometriai jelentés? Az Olvasónak némi segítséget nyújthat az ábra.



3.1. ábra. A Newton-iteráció geometriai szemléltetése.

- A kvadratus konvergencia csak lokális! Mit is jelent ez? Vizsgáljuk meg az alábbi egyenlőtlenséget:

$$|\varepsilon^{(k)}| \leq q |\varepsilon^{(k-1)}|^2.$$

Legyen $q = 10^3$ és tegyük fel, hogy a becslés valamennyire éles. Legyen a kezdeti hiba értéke $\varepsilon^{(0)} = 10^{-2}$, ekkor

$$|\varepsilon^{(1)}| \leq 10^3 |10^{-2}|^2 = 10^{-1},$$

ami azt jelenti, hogy kudarcot vallottunk, hiszen nem tudjuk biztosítani, hogy a hiba csökkenjen (sőt)! Ennek oka, hogy a kezdeti hiba nem volt elég kicsi. Az Olvasó adja meg, hogy milyen kicsi kell, hogy legyen, ahhoz, hogy az iteráció jól működjön!

3.1.12. Példa. Tekintsük a 3.1.2. Példát! Itt az IE alkalmazása a következőt jelentette.

$$y_n^h = y_{n-1}^h - h (y_n^h)^2,$$

amit átrendezve és az ismeretlent x -el jelölve kapjuk, hogy

$$f(x) = y_{n-1}^h - hx^2 - x,$$

és szeretnénk megoldani az $f(x) = 0$ egyenletet. $f'(x) = -(2hx + 1)$ és $f''(x) = -2h$.

A Newton-iteráció a következőképp működik.

$$\begin{cases} x^{(k)} = x^{(k-1)} + \frac{y_{n-1}^h - h(x^{(k-1)})^2 - x^{(k-1)}}{2hx^{(k-1)} + 1} \\ x^{(0)} = y_{n-1}^h. \end{cases}$$

Mivel

$$\frac{\max_{x \in [a,b]} |f''(x)|}{2 \min_{x \in [a,b]} |f'(x)|} < \frac{2h}{2} = h,$$

így

$$|\varepsilon^{(k)}| < h |\varepsilon^{(k-1)}|^2,$$

vagyis a konvergencia nagyon gyors, a kezdőérték pedig bőven benne van a kívánt intervallumban.

3.1.13. Példa. A korábban szerepelt többi példa kidolgozását Newton-iterációval az Olvasóra bízunk.

Összehasonlítás. Hasonlítsuk össze a különböző alternatívákat!

3.1.14. Példa. Elsőnek térjünk vissza a teszt-egyenlet vizsgálatára a $\lambda = -100$ és $T = 1$ esetben!

Azt kaptuk korábban, hogy EE esetében $N > 50$, egy minimális megszorítás, illetve ha pozitív közelítővektort szeretnénk, akkor $N > 100$, de inkább $N \gg 100$ szükséges a megfelelő közelítés eléréséhez.

Az IE már $N = 10$ esetén is jó közelítést adott, ha a lépésenként keletkező egyenletet pontosan oldjuk meg. Most tekintsünk el attól, hogy ez ebben az egyszerű esetben könnyen lehetséges, mert általában nem számíthatunk erre. Láttuk, hogy 3.1.9. Példában, hogy egyszerű iteráció alkalmazása esetében a kontrakciófeltétel pont $N > 100$ megkötést jelent (és a gyors konvergenciához $N \gg 100$), tehát semmit sem nyernénk ezzel.

Mi a helyzet, ha Newton-iterációt alkalmazunk? Az $f(x) = 0$ egyenletet szeretnénk megoldani (azaz csak közelíteni a megoldását!), ahol $f(x) = y_{n-1}^h - x(1 + 100h)$

A Newton-iteráció pedig a következő

$$x^{(k)} = x^{(k-1)} + \frac{y_{n-1}^h - x^{(k-1)}(1 + 100h)}{1 + 100h} = \frac{y_{n-1}^h}{1 + 100h},$$

tehát bárhonnan indítva az iterációt egy lépésben a pontos megoldást adja! Ez elsőre meglepően hangzik, de ha megértettük a Newton-iteráció geometriai jelentését, akkor triviális (az Olvasó gondolja meg, hogy miért).

Tehát ez esetben realizálni tudjuk az implicitégből származó előnyt, választhatunk durva felosztást is.

Ez a példa túl kellemes volt a Newton-iteráció szempontjából, így könnyen tudott lényegesen jobb eredményt produkálni, mint az EE, vagy mint ha az IE-t az egyszerű iterációval kombináltuk volna. A következőkben egy lényegesen kellemetlenebb feladaton hasonlítjuk össze ezen módszereket.

3.1.15. Példa. Tekintsük a következő KÉP-et!

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = \lambda \left(ty^2(t) - \frac{1}{t} \right) - \frac{1}{t^2}, & t \in (1, 25] \\ y(1) = 1. \end{cases}$$

A megoldás $y(t) = \frac{1}{t}$. Az alábbiakban mellékeljük a három kódot.

```
function egypertEE(N,lambda,T)
% y'(t)=lambda*(t*y^2(t)-1/t)-1/t^2;
% y(1)=1
% numerikus megoldasa az EE módszerrel az
% [1,T] intervallumon
% N      - felosztas
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

%format long
h=(T-1)/N
t=linspace(1,T,N+1); % az intervallum felosztasa
y=zeros(1,N+1); % a numerikus megoldas vektora
pontos=zeros(1,N+1); % pontos megoldas vektora
hibavektor=zeros(1,N+1); % hibavektor

% a pontos megoldas betoltese:
for j=1:(N+1)
```



```
%format long
h=(T-1)/N
t=linspace(1,T,N+1); % az intervallum felosztasa
y=zeros(1,N+1); % a numerikus megoldas vektora
pontos=zeros(1,N+1); % pontos megoldas vektora
hibavektor=zeros(1,N+1); % hibavektor

% a pontos megoldas betoltese:
for j=1:(N+1)
    pontos(j)=pl1(t(j));
end

% numerikus megoldas kiszamolasa:
y(1)=1;
tic
for j=1:N
    y(j+1)=fixiter(t(j+1),y(j),y(j),lambda,h,it);
end
time=toc

% hiba
hibavektor=y-pontos;
% maxhiba
maxhiba=max(abs(hibavektor))

% abrazolas:
subplot(1,3,1)
plot(t,y)
title('Numerikus megoldas')
subplot(1,3,2)
plot(t,pontos,'g')
title('Pontos megoldas')
subplot(1,3,3)
plot(t,hibavektor,'r')
title('Hiba')
end

%
% a (pontos) megoldas:
function ered=pl1(t)
ered=1/t;
end

%
% fixpontiteracio:
function x=fixiter(t,y,x,lambda,h,it)
for i=1:it
```



```

        x=y+h*(lambda*(t*x^2-1/t)-1/t^2);
end
end

```

```

function egyptertIENewton(N,it,lambda,T)
% y'(t)=lambda*(t*y^2(t)-1/t)-1/t^2;
% y(1)=1
% numerikus megoldasa az IE+Newton módszerrel az
% [1,T] intervallumon
% N      -   felosztas
% it     -   Newton-iteracio iteracioszama
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

%format long
h=(T-1)/N % lepeskoz
t=linspace(1,T,N+1); % az intervallum felosztasa
y=zeros(1,N+1); % a numerikus megoldas vektora
pontos=zeros(1,N+1); % pontos megoldas vektora
hibavektor=zeros(1,N+1); % hibavektor

% a pontos megoldas betoltese:
for j=1:(N+1)
    pontos(j)=pl1(t(j));
end

% numerikus megoldas kiszamolasa:
y(1)=1;
tic
for j=1:N
    y(j+1)=Newton(t(j+1),y(j),y(j),lambda,h,it);
end
time=toc

% hiba
hibavektor=y-pontos;
% maxhiba
maxhiba=max(abs(hibavektor))

% abrazolas:
subplot(1,3,1)
plot(t,y)
title('Numerikus megoldas')
subplot(1,3,2)

```

```

plot(t,pontos,'g')
title('Pontos megoldas')
subplot(1,3,3)
plot(t,hibavektor,'r')
title('Hiba')
end
%-----
% a (pontos) megoldas:
function ered=pll(t)
ered=1/t;
end
%-----
% Newton-iteracio:
function x=Newton(t,y,x,lambda,h,it)
for i=1:it
    x = x - (y+h*(lambda*(t*x^2-1/t)-1/t^2)-x) / (2*h*lambda*t*x-1);
end
end

```

3.1.16. Feladat. Először is az Olvasó értse meg a kódokat! Ehhez kísérletezzzen velük.

- Módosítsa az Olvasó az EE kódját úgy, hogy a Heun-módszert alkalmazza!
- Módosítsa az Olvasó az EE kódját úgy, hogy a RK4 módszert alkalmazza!
- Módosítsa a megadott kódokat (mindhármát) a következő általánosabb probléma megoldásához! k legyen bemenő paraméter.

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = \lambda \left(t^k y^{k+1}(t) - \frac{1}{t} \right) - \frac{1}{t^2}, & t \in (1, 25] \\ y(1) = 1. \end{cases}$$

A kódokat didaktikusra írtuk, általában csak a végső pontbeli közelítésre van szüksége az embernek, így a többi értéket eltárolni pazarlás. Mi viszont összehasonlítani szeretnénk volna a módszereket, mégpedig minden időrétegen. További egyszerűsítést lehet elérni, ha nem írjuk külön függvénybe az egyszerű, illetve Newton-iterációt és hívjuk őket minden lépésben, hanem direktben beépítjük az alapkódba. A függvényhívás költséges tud lenni. Viszont a kód így sokkal áttekinthetőbb.

Most pedig térjünk rá az összehasonlításra! Legyen $\lambda = -50$, ekkor azt kapjuk, hogy

- EE esetében
 $N = 800$ esetén a maxhiba Inf ,
 $N = 1000$ esetén a maxhiba 0.4749,
 $N = 1195$ esetén a maxhiba 0.0081 és $N \geq 1200$ esetében kezd igazán jól működni a módszer.
- IE+egyszerű iteráció esetében azt kapjuk, hogy $N > 1200$ esetében kezd jól működni a módszer. Tehát nem kifizetődő ezt választanunk.
- IE+Newton-iteráció esetében, 3 iterációs lépéssel
 $N = 120$ esetén a maxhiba 0.0013,
 $N = 240$ esetén a maxhiba $7.5103e - 004$.

Ezek az eredmények azt mutatják, hogy érdemes az IE+Newton-iterációt választanunk.

Az Olvasó kísérletezzon egy kicsit a programokkal! Például levihetjük -e még jobban a Newton-iteráció lépésszámát?

A következőkben összefoglaljuk az egyszerű iteráció és a Newton-iteráció összehasonlításából leszűrt tanulságokat:

- az egyszerű iteráció lineáris konvergenciát biztosít, a Newton-iteráció kvadratikusat,
- egyszerű iteráció kontrakciószáma lineárisan függ h -tól, a Newton-iteráció konvergenciasebessége kevésbé függ h -tól,
- az egyszerű iteráció globális konvergenciát biztosít (kezdőértéktől független), a Newton-iteráció csak lokálisat, de úgyis közélről indítjuk az iterációt (ez persze függ h -tól), így ez a hátrány nem jelentős.

Mindezek alapján a Newton-iteráció tűnik kedvezőbbnek. A konklúzió az, hogy Newton-iterációt érdemes alkalmazni, az y_{n-1}^h kezdőértékből indítva és 3-nál többet nem érdemes iterálni, sokszor 1 lépés is elegendő! Vannak ugyanakkor további szempontok is, amik főként magasabb dimenzióban jelentkeznek. Például a derivált kiszámítása korántsem lesz problémamentes, ha egyáltalán lehetséges. Ez egy dimenzióban (ahol eddig végig dolgoztunk) egyáltalán nem jelentett akadályt, így fel sem tűnt, de a későbbiekben figyelembe kell vennünk.

3.2. Numerikus megoldási módszerek – elméleti rész

Korábban láttuk, hogy az eddig bevezetett módszerek jó eredményt tudnak szolgáltatni bizonyos példák esetében, ehhez csak a felosztást megfelelő finomságúra venni. Ugyanakkor mindeddig olyan példákkal kísérleteztünk, ahol a megoldás ismert volt és így össze tudtuk hasonlítani a numerikus közelítésünket vele. A gyakorlatban pont olyan feladatok megoldását szeretnénk közelíteni, ahol a megoldást nem áll módunkban előállítani. A kérdés az, hogy vajon ezekben az esetekben is tudjuk garantálni, hogy a numerikus megoldásunk konvergál a megoldáshoz, más szóval a hibát tudjuk-e tetszőlegesen kicsívé tenni? Ez lehetetlennek tűnik, de látni fogjuk, hogy korántsem az! Viszont ehhez előkészületeket kell tegyünk.

3.2.1. Normált terek, folytonos lineáris leképezések

Ha két vektort össze szeretnénk hasonlítani, akkor a különbségük hosszát szeretnénk mérni, vagyis egyrészt van egy vektortér struktúránk (így el tudjuk végezni a kivonást), másrészt a hosszmérés kapcsolódik a metrikus terekhez. Ezt a két fogalmat kell kombináljuk, ez lesz a normált tér fogalma.

A szokásos módon, síkbeli (térbeli) vektorok hosszát alapul véve, készítünk egy listát arról, hogy ez a hosszfogalom hogyan működik, majd bármit, ami megfelel ezeknek a tulajdonságoknak elfogadjuk, hogy alkalmas hosszmérésre.

Hasonlóan a metrikus tereket tárgyaló részhez, itt is az Olvasó figyelmébe ajánljuk a [MHH13, I/4. és I/5.] jegyzet megfelelő fejezetét, ahol olyan példákat találhat, melyek segítik a fogalmak megfelelő mélységű elsajátítását.

Normált terek.

3.2.1. Definíció. Legyen X VT az $\mathbb{R}$ (vagy $\mathbb{C}$) számtest felett. Tekintsük az $\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ függvényt, mely rendelkezik az alábbi tulajdonságokkal.

1. $\|x\| = 0 \iff x = 0_X$
2. $\|\lambda \cdot x\| = |\lambda| \cdot \|x\| \quad \forall x \in X, \forall \lambda \in \mathbb{R} \text{ (vagy } \mathbb{C})$
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad \forall x, y \in X$ (háromszög-egyenlőtlenség)

Ekkor amh. az $(X, \|\cdot\|)$ rendezett pár *normált tér* (NT), az $\|x\|$ szám pedig az x elem normája.

Az $(X, \|\cdot\|)$ NT-en a $d(x, y) = \|x - y\|$ metrikát definiál, így a konvergencia és Cauchy-sorozat fogalma átvihető normált térre, továbbá függvények folytonossága (folytonosság, Lipschitz-folytonosság, kontrakció) szintén hasonlóan tárgyalható, mint MT-ben.

3.2.2. Feladat. Az Olvasó ellenőrizze le, hogy az alábbiak normált teret alkotnak!

- $(\mathbb{R}, |\cdot|)$
- $(\mathbb{R}^d, \|\cdot\|_2)$, ahol $\|\mathbf{v}\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^d v_i^2}$
- $(\mathbb{R}^d, \|\cdot\|_\infty)$, ahol $\|\mathbf{v}\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq d} |v_i|$
- $(\mathbb{R}^d, \|\cdot\|_1)$, ahol $\|\mathbf{v}\|_1 = \sum_{i=1}^d |v_i|$
- $(C[a, b], \|\cdot\|_\infty)$, ahol $\|f\|_\infty = \max_{a \leq x \leq b} |f(x)|$
- $(C[a, b], \|\cdot\|_f)$, ahol $\|f\|_f = \int_a^b |f(x)| \, dx$

3.2.3. Definíció. Amh. az $(X, \|\cdot\|)$ NT-beli (x_n) sorozat

- *konvergens*, ha $\exists a \in X: \|x_n - a\| \rightarrow 0$.
- *Cauchy-sorozat*, ha $\|x_n - x_m\| \rightarrow 0$, ha $m > n, n \rightarrow \infty$.

3.2.4. Definíció. Amh. az $(X, \|\cdot\|)$ NT *Banach-tér* (BT), ha teljes, vagyis ha minden Cauchy-sorozata konvergens.

3.2.5. Feladat. Az Olvasó ellenőrizze le, hogy az előző példában szereplő NT-ek BT-ek-e.

Egy VT-en többféleképp is tudunk normát definiálni. Ezek közül némelyik könnyen, némelyik nehezebben számítható ki, ugyanakkor előfordul, hogy az alkalmazás olyan norma használatát igényli, amellyel kényelmetlen dolgozni. A kérdés sokszor az, hogy egy sorozat normája (mondjuk ami a hiba nagyságát reprezentálja) nullához tart-e. Ennek a kérdésnek az eldöntéséhez sokszor szívesebben választanánk egy "kellemesebb" normát. A kérdés az, hogy ezt megtehetjük-e. Ehhez bizonyul hasznosnak a következő fogalom.

3.2.6. Definíció. Amh. az $\|\cdot\|_a$ és $\|\cdot\|_b$ normák ekvivalensek az X VT-en, ha $\exists c_1, c_2 \in \mathbb{R}^+$: $c_1 \|x\|_a \leq \|x\|_b \leq c_2 \|x\|_a \forall x \in X$.

Ha két norma ekvivalens, akkor az előzőekben vázolt kérdésre a válasz az, hogy igen lecserélhetjük, ha a két norma ekvivalens. Az Olvasó gondolja meg, hogy miért! Illetve azt is, hogy a definíció látszólag aszimmetrikus, de ez igazából nincs így!

Folytonos lineáris leképezések. A következőkben a folytonosság fogalmát járjuk körül egy speciális esetben. Feltesszük mégpedig azt is, hogy a leképezésünk lineáris. Ha arra gondolunk, hogy a $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos lineáris leképezések pont azok, amiknek a gráfja egy origón átmenő egyenes, akkor, ez látszólag túlságosan beszűkíti a tanulmányozni kívánt leképezések körét. De, mint ezt látni fogjuk, nincs így.

3.2.7. Definíció. Legyen $(X, \|\cdot\|_X)$ és $(Y, \|\cdot\|_Y)$ NT, $D \subset X$, $a \in D$. Amh. az $f : D \rightarrow Y$ fv. folytonos az a pontban, ha $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$, hogy ha $x \in D$ és $\|x - a\|_X < \delta$, akkor $\|f(x) - f(a)\|_Y < \varepsilon$.

3.2.8. Lemma. Legyen $(X, \|\cdot\|_X)$ és $(Y, \|\cdot\|_Y)$ NT, és legyen $A : X \rightarrow Y$ egy lineáris leképezés. Ekkor a következő két állítás ekvivalens.

- A folytonos a 0_X helyen.
- A folytonos.

Ennek igazolását (mivel csak a definíciókat kell hozzá használni) az Olvasóra bízuk. Ez az eredmény azt jelenti, hogy ha egy linearitás leképezés egy pontban folytonos, akkor mindenhol az.

3.2.9. Lemma. Legyen $(X, \|\cdot\|_X)$ és $(Y, \|\cdot\|_Y)$ NT, és legyen $A : X \rightarrow Y$ egy lineáris leképezés. Ekkor a következő két állítás ekvivalens.

1. A folytonos.
2. $\exists K$, hogy $\|Ax\|_Y \leq K \|x\|_X$ teljesül $\forall x \in X$.

Bizonyítás. • $\Leftarrow$: a linearitást kihasználva kapjuk, hogy A Lipschitzes a K Lipschitz-állandóval, hiszen $\|Ax_1 - Ax_2\|_Y = \|A(x_1 - x_2)\|_Y \leq K \|x_1 - x_2\|_X$. Ebből pedig következik, hogy A folytonos.

- $\Rightarrow$: Indirekt, tfh. a második tulajdonság nem teljesül, vagyis $\exists(x_n)$, $x_n \neq 0_X$ sorozat, melyre $\|Ax_n\|_Y \geq n \|x_n\|_X$. Ekkor $z_n = \frac{x_n}{n \|x_n\|_X}$ vektorokra $\|z_n\|_X = \frac{1}{n}$, tehát $z_n \rightarrow 0_X$, ugyanakkor $\|Az_n\|_Y \geq 1$, tehát $Az_n \not\rightarrow 0_Y$, ami ellentmond A folytonosságának.

□

A második tulajdonságot korlátosságnak nevezzük (amely különbözik a $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvények kapcsán használt korlátosságtól). Be lehet látni, hogy ha van ilyen K , akkor van legkisebb ilyen is.

3.2.10. Definíció. Legyen $(X, \|\cdot\|_X)$ és $(Y, \|\cdot\|_Y)$ NT. Az X -ből Y -ba képező folytonos lineáris leképezések halmazát $L(X, Y)$ -nal jelöljük.

3.2.11. Definíció. Legyen $A \in L(X, Y)$, ekkor az A leképezés normáját a következőképpen jelöljük és értelmezzük

$$\|A\|_{L(X,Y)} = \min\{K \in \mathbb{R}_0^+ : \|Ax\|_Y \leq K \|x\|_X \ \forall x \in X\}.$$

A következő lemma egy alapvető becslést mutat, amit a későbbiekben számtalanszor fogunk használni.

3.2.12. Lemma. Legyen $(X, \|\cdot\|_X)$ és $(Y, \|\cdot\|_Y)$ NT, és legyen $A : X \rightarrow Y$ egy folytonos lineáris leképezés. Ekkor

$$\|Ax\|_Y \leq \|A\|_{L(X,Y)} \|x\|_X$$

teljesül $\forall x \in X$.

A bizonyítást az Olvasóra bízunk, ahogy a következő állításét is, mely további lehetőségeket mutat a norma meghatározására.

3.2.13. Lemma. Legyen $A \in L(X, Y)$, ekkor $\|A\|_{L(X,Y)} = \sup_{x \in X, x \neq 0_X} \frac{\|Ax\|_Y}{\|x\|_X} = \sup_{x \in X, x \neq 0_X, \|x\|_X \leq 1} \|Ax\|_Y = \sup_{x \in X, \|x\|_X = 1} \|Ax\|_Y$.

3.2.14. Feladat. Az Olvasó tanulmányozza a következő leképezéseket linearitás, folytonosság szempontjából, illetve - ha van - állapítsa meg a normájukat!

- $A : (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\infty) \rightarrow (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\infty)$, $A(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

- ugyanez a leképezés más normákkal: $\mathbf{A} : (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\infty) \rightarrow (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_1)$, $\mathbf{A} : (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_1) \rightarrow (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\infty)$, ...
- $\mathbf{A}$ -t cseréljük le az $\mathbf{I}$ identitásmátrixra és itt is kísérletezzünk más normákkal!
- $\phi : (C[a, b], \|\cdot\|_f) \rightarrow (\mathbb{R}, |\cdot|)$, $\phi(g) = \int_a^b g(x) \, dx$
- $\varphi : (C^1[a, b], \|\cdot\|_\infty) \rightarrow (C[a, b], \|\cdot\|_\infty)$, $\varphi(g) = g'(x)$
- $I : (C[a, b], \|\cdot\|_f) \rightarrow (C[a, b], \|\cdot\|_\infty)$, $I(g) = g$
- $I : (C[a, b], \|\cdot\|_\infty) \rightarrow (C[a, b], \|\cdot\|_f)$, $I(g) = g$

3.2.15. Feladat. Legyen $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{d \times d}$ tetszőleges mátrix. Mutassuk meg, hogy ha

- $X = (\mathbb{R}^d, \|\cdot\|_\infty)$, $Y = (\mathbb{R}^d, \|\cdot\|_\infty)$, akkor

$$\|A\|_{L(X,Y)} = \max_i \sum_{j=1}^d |a_{ij}| ,$$

ezt a mátrixnormát röviden $\|A\|_\infty$ -vel fogjuk jelölni és gyakran sornormának hívják.

- $X = (\mathbb{R}^d, \|\cdot\|_1)$, $Y = (\mathbb{R}^d, \|\cdot\|_1)$, akkor

$$\|A\|_{L(X,Y)} = \max_j \sum_{i=1}^d |a_{ij}| ,$$

ezt a mátrixnormát röviden $\|A\|_1$ -vel fogjuk jelölni és gyakran oszlopnormának hívják.

- Mi a helyzet, ha $X = (\mathbb{R}^d, \|\cdot\|_\infty)$, $Y = (\mathbb{R}^d, \|\cdot\|_1)$, illetve, ha $X = (\mathbb{R}^d, \|\cdot\|_1)$, $Y = (\mathbb{R}^d, \|\cdot\|_\infty)$?

3.2.2. Az explicit-Euler módszer elemzése

Most rátérünk annak elemzésére, hogy az EE által előállított közelítés konvergál a kezdetiérték probléma megoldásához, tetszőleges kezdetiérték probléma esetén (csupán azzal a feltétellel, hogy a megoldás kellően sima)! Ha ezt sikerülne belátni, akkor ez azt jelentené, hogy maga a módszer megbízható. Nem kell a továbbiakban majd attól tartani, hogy némely probléma esetében működik, néha pedig nem.

Az első probléma az, hogy miképp tudjuk összehasonlítani az y megoldást és az $\mathbf{y}^h$ közelítést. Természetes módon ezt rácspontokban tudjuk megtenni.

Jelölje tehát $P^h(y) = (y(t_0), y(t_1), \dots, y(T)) \in \mathbb{R}^{N+1}$ a megoldásból készített vektort, mely a rácspontokban felvett függvényértékeket tartalmazza. A P betű a projekció szóra utal, a függvényt "levetítettük egy rácusra". Így már definiálhatjuk numerikus módszerek konvergenciájának fogalmát.

3.2.16. Definíció. Amh. egy numerikus módszer *konvergens*, ha

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|P^h(y) - \mathbf{y}^h\|_{\infty} = 0.$$

3.2.17. Megjegyzés. • Ezzel a normaválasztással a legnagyobb eltérést vizsgáljuk, ami egy racionális választás, de nem az egyetlen lehetőség.

- Felhívjuk a figyelmet arra, hogy $h \rightarrow 0$ mellett mind $P^h(y)$, mind $\mathbf{y}^h$ vektorok mérete változik, sőt, tart a végtelenhez!
- Ez csupán egy elméleti definíció, amit nem tudunk direktben alkalmazni, hiszen azért kényszerülünk numerikus módszerek használatára, mert nem ismerjük az y megoldást és így az $P^h(y)$ vektorokat sem.

A következőkben arra törekszünk, hogy ezt az elméleti fogalmat használhatóvá tegyük, annak ellenére, hogy nem ismerjük a megoldást. Ezért bevezetünk két másik fogalmat (konzisztencia és stabilitás), amik kiváltják a konvergenciát, de (valamennyire) függetlenek a megoldástól. Ehhez először átfogalmazzuk mind a kezdetiérték problémát, mind az EE-t.

Legyen $u \in C^1[t_0, T]$ tetszőleges, az F leképezést a következőképp értelmezzük:

$$(F(u))(t) = \begin{cases} \dot{u}(t) - f(t, u(t)), & t \in (t_0, T] \\ u(t_0) - y_0, & t = t_0. \end{cases}$$

Ekkor a KÉP az

$$(F(y))(t) = 0, \quad t \in [t_0, T]$$

alakot ölti, ahol továbbra is az y megoldást keressük.

Hasonlóképp át tudjuk írni az EE-t is (és az eddig bevezetett módszerek mindegyikét). Legyen $\mathbf{u}^h \in \mathbb{R}^{N+1}$ tetszőleges, az $\mathcal{F}^h$ leképezést a következőképp értelmezzük:

$$(\mathcal{F}^h(\mathbf{u}^h))_n = \begin{cases} \frac{u_n^h - u_{n-1}^h}{h} - f(t_{n-1}, u_{n-1}^h), & n = 1, \dots, N \\ u_0^h - y_0, & n = 0. \end{cases}$$

Ekkor EE az

$$(\mathcal{F}^h(\mathbf{y}^h))_n = 0, \quad n = 0, \dots, N$$

alakot ölti, ahol az $\mathbf{y}^h$ numerikus megoldást keressük.

A konvergencia $P^h(y)$ és $\mathbf{y}^h$ összehasonlítását igényelné, ami helyett először F -et és $\mathcal{F}^h$ -t hasonlítjuk össze (a megoldáson).

3.2.18. Definíció. Amh. a numerikus módszer *konzisztens*, ha

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|P^h(F(y)) - \mathcal{F}^h(P^h(y))\|_\infty = 0.$$

3.2.19. Megjegyzés. Vegyük észre, hogy

$$\|P^h(F(y)) - \mathcal{F}^h(P^h(y))\|_\infty = \|\mathcal{F}^h(P^h(y))\|_\infty,$$

mely mennyiséget képlethibának is szokták nevezni, azon megfontolásból, hogy a numerikus módszer képletének hibáját méri az y megoldáson.

3.2.20. Lemma. *Tfh. $y \in C^2[t_0, T]$. Ekkor EE konzisztens, mégpedig elsőrendben.*

Bizonyítás. A feltett simaság miatt, lásd 5.1.17.Tétel, $\exists \xi_n \in (t_{n-1}, t_n)$, hogy

$$y(t_n) = y(t_{n-1}) + \dot{y}(t_{n-1})h + \frac{\ddot{y}(\xi_n)}{2!}h^2,$$

vagyis

$$\frac{y(t_n) - y(t_{n-1})}{h} = \dot{y}(t_{n-1}) + \frac{\ddot{y}(\xi_n)}{2!}h.$$

Továbbá kihasználjuk, hogy $\ddot{y}$ folytonos a zárt $[t_0, T]$ intervallumon, így ott korlátos is, tehát $\exists M$, hogy $|\ddot{y}(t)| \leq M$, $\forall t \in [t_0, T]$. Így

$$|(\mathcal{F}^h(P^h(y)))_n| = \begin{cases} \left| \frac{y(t_n) - y(t_{n-1})}{h} - f(t_{n-1}, y(t_{n-1})) \right| = \left| \frac{\ddot{y}(\xi_n)}{2!} h \right| \leq \frac{M}{2} h, & n = 1, \dots, N \\ 0, & n = 0. \end{cases}$$

Ezzel beláttuk, hogy $\|\mathcal{F}^h(P^h(y))\|_\infty \leq \frac{M}{2} h \rightarrow 0$, ha $h \rightarrow 0$ és azt is látjuk, hogy a konzisztencia elsőrendű. $\square$

3.2.21. Megjegyzés. • Habár a konzisztencia definíciója formálisan tartalmazta y -t, a bizonyításban sikerült ezt kiküszöbölni annyiban, hogy csak azt használtuk fel, hogy $y \in C^2[t_0, T]$.

- Az, hogy EE konzisztens azt jelenti, hogy $\mathcal{F}^h$ jól közelíti F -et, vagyis a módszer a KÉP-et. Ugyanakkor nekünk ennél több kell.

3.2.22. Definíció. Amh. a numerikus módszer *stabil*, ha $\exists S \in \mathbb{R}$, $\exists h_0 > 0$, hogy $\forall h < h_0$ esetén $\forall \mathbf{u}^h, \mathbf{v}^h$ -ra

$$\|\mathbf{u}^h - \mathbf{v}^h\|_\infty \leq S \|\mathcal{F}^h(\mathbf{u}^h) - \mathcal{F}^h(\mathbf{v}^h)\|_\infty \quad (3.1)$$

teljesül.

Ez egy elég absztrakt fogalom, így álljunk meg egy pillanatra! A Lipschitzesség pont fordított relációt jelentene. Tegyük fel egy pillanatra, hogy létezik $\mathcal{F}^h$ -nak inverze, ekkor (3.1)-t át lehet fogalmazni az inverzek nyelvére, ahonnan már látszik, hogy a reláció pont az inverzek egyenletes Lipschitzességét jelenti. Az Olvasó gondolja meg, hogy miért létezik az inverz!

Mielőtt belátnánk az EE stabilitását, takarítsuk be a profitot!

3.2.23. Tétel. *Ha egy numerikus módszer konzisztens és stabil, akkor konvergens is.*

Bizonyítás.

$$\|P^h(y) - \mathbf{y}^h\|_\infty \leq S \|\mathcal{F}^h(P^h(y)) - \mathcal{F}^h(\mathbf{y}^h)\|_\infty = S \|\mathcal{F}^h(P^h(y))\|_\infty \rightarrow 0.$$

$\square$

Térjünk rá az EE stabilitására, melynek igazolása már komolyabb kihívás.

3.2.24. Lemma. *Az EE stabil.*

Bizonyítás. Térjünk át mátrix-vektoros írásmódra!

$$\mathcal{F}^h(\mathbf{u}^h) = \mathbf{A}^h \mathbf{u}^h - \mathbf{B}^h \mathbf{f}(\mathbf{u}^h) - \mathbf{c}^h, \quad (3.2)$$

ahol $\mathbf{u}^h = (u_0, u_1, \dots, u_N)^T$, $\mathbf{f}(\mathbf{u}^h) = (f(u_0), f(u_1), \dots, f(u_N))^T$, $\mathbf{c}^h = (y_0, 0, \dots, 0)^T$,

$$\mathbf{A}^h = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ -\frac{1}{h} & \frac{1}{h} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -\frac{1}{h} & \frac{1}{h} & 0 & \dots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & -\frac{1}{h} & \frac{1}{h} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B}^h = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Legyen $\mathbf{u}^h, \mathbf{v}^h \in \mathbb{R}^{N+1}$, ekkor

$$\mathcal{F}^h(\mathbf{u}^h) - \mathcal{F}^h(\mathbf{v}^h) = \mathbf{A}^h(\mathbf{u}^h - \mathbf{v}^h) - \mathbf{B}^h(f(\mathbf{u}^h) - f(\mathbf{v}^h)), \quad (3.3)$$

Vegyük észre, hogy

$$(\mathbf{A}^h)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 1 & h & 0 & \dots & 0 \\ 1 & h & h & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 1 & h & \dots & h & h \end{pmatrix},$$

vagyis $(\mathbf{A}^h)^{-1} \geq \mathbf{0}$, amivel azt jelöljük, hogy elemenként nemnegatív. $(\mathbf{A}^h)^{-1}$ -el beszorozva balról a (3.3) egyenlőséget kapjuk, hogy

$$(\mathbf{A}^h)^{-1} (\mathcal{F}^h(\mathbf{u}^h) - \mathcal{F}^h(\mathbf{v}^h)) = (\mathbf{u}^h - \mathbf{v}^h) - (\mathbf{A}^h)^{-1} \mathbf{B}^h (f(\mathbf{u}^h) - f(\mathbf{v}^h)).$$

Vegyünk koordinátánként abszolút értéket (ezt a szokott abszolút érték jellel jelöljük) és alkalmazzunk háromszög egyenlőtlenséget:

$$\begin{aligned} |(\mathbf{A}^h)^{-1} (\mathcal{F}^h(\mathbf{u}^h) - \mathcal{F}^h(\mathbf{v}^h))| &= |(\mathbf{u}^h - \mathbf{v}^h) - (\mathbf{A}^h)^{-1} \mathbf{B}^h (f(\mathbf{u}^h) - f(\mathbf{v}^h))| \geq \\ &|\mathbf{u}^h - \mathbf{v}^h| - |(\mathbf{A}^h)^{-1} \mathbf{B}^h (f(\mathbf{u}^h) - f(\mathbf{v}^h))| \geq \\ &|\mathbf{u}^h - \mathbf{v}^h| - |(\mathbf{A}^h)^{-1} \mathbf{B}^h| |f(\mathbf{u}^h) - f(\mathbf{v}^h)|, \end{aligned}$$

ahol kihasználva a Lipschitzességet

$$\begin{aligned} |\mathbf{u}^h - \mathbf{v}^h| - |(\mathbf{A}^h)^{-1} \mathbf{B}^h| |f(\mathbf{u}^h) - f(\mathbf{v}^h)| &\geq \\ |\mathbf{u}^h - \mathbf{v}^h| - |(\mathbf{A}^h)^{-1} \mathbf{B}^h| L |\mathbf{u}^h - \mathbf{v}^h| &= (\mathbf{I} - L |(\mathbf{A}^h)^{-1} \mathbf{B}^h|) |\mathbf{u}^h - \mathbf{v}^h|. \end{aligned}$$

Az egyszerűség kedvéért vezessük be a következő jelölést: $\mathbf{X}^h = \mathbf{I} - L |(\mathbf{A}^h)^{-1} \mathbf{B}^h|$, ekkor

$$\begin{aligned} (\mathbf{A}^h)^{-1} \mathbf{B}^h &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ h & 0 & 0 & \dots & 0 \\ h & h & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ h & h & \dots & h & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{X}^h = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ -Lh & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -Lh & -Lh & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ -Lh & -Lh & \dots & -Lh & 1 \end{pmatrix} \\ (\mathbf{X}^h)^{-1} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ Lh & 1 & 0 & \dots & 0 \\ Lh(1+Lh) & Lh & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ Lh(1+Lh)^{N-1} & Lh(1+Lh)^{N-2} & \dots & Lh & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Ami azt jelenti, hogy $(\mathbf{X}^h)^{-1} \geq \mathbf{0}$, vagyis megszorozhatjuk vele az egyenlőtlenséget balról:

$$(\mathbf{X}^h)^{-1} |(\mathbf{A}^h)^{-1} (\mathcal{F}^h(\mathbf{u}^h) - \mathcal{F}^h(\mathbf{v}^h))| \geq |\mathbf{u}^h - \mathbf{v}^h|.$$

A bal oldalon szereplő mindkét mátrix nemnegatív, így a bal oldalt felül tudjuk becsülni a következőképpen:

$$(\mathbf{X}^h)^{-1} (\mathbf{A}^h)^{-1} |\mathcal{F}^h(\mathbf{u}^h) - \mathcal{F}^h(\mathbf{v}^h)| \geq |\mathbf{u}^h - \mathbf{v}^h|.$$

Vegyük mindkét oldal normáját!

$$\left\| (\mathbf{X}^h)^{-1} (\mathbf{A}^h)^{-1} |\mathcal{F}^h(\mathbf{u}^h) - \mathcal{F}^h(\mathbf{v}^h)| \right\|_{\infty} \geq \|\mathbf{u}^h - \mathbf{v}^h\|_{\infty},$$

majd a bal oldalt felülbecsülve (lásd 3.2.12.Lemma) kapjuk, hogy

$$\left\| (\mathbf{X}^h)^{-1} (\mathbf{A}^h)^{-1} \right\|_{\infty} \|\mathcal{F}^h(\mathbf{u}^h) - \mathcal{F}^h(\mathbf{v}^h)\|_{\infty} \geq \|\mathbf{u}^h - \mathbf{v}^h\|_{\infty},$$

Kiszámíthatjuk a $(\mathbf{X}^h)^{-1} (\mathbf{A}^h)^{-1}$ mátrixot, majd a normáját (lásd 3.2.15.Feladat), amit felülbecsülhetünk egy felosztástól független mennyiséggel:

$$\left\| (\mathbf{X}^h)^{-1} (\mathbf{A}^h)^{-1} \right\|_{\infty} = (1 + Lh)^N + \frac{(1 + Lh)^N - 1}{L} < e^{L(T-t_0)} + \frac{e^{L(T-t_0)} - 1}{L}.$$

Ez azt jelenti, hogy a (3.1) stabilitási becslésben szereplő konstanst választhatjuk $S = e^{L(T-t_0)} + \frac{e^{L(T-t_0)} - 1}{L}$ -nek. Az Olvasó végezze el a részsámításokat, ellenőrizze le a normára kapott formulát! $\square$

3.2.25. Megjegyzés. Ez azt jelenti, hogy

$$\|P^h(y) - \mathbf{y}^h\|_\infty \leq \left(\frac{e^{L(T-t_0)} - 1}{L} + e^{L(T-t_0)} \right) \frac{M}{2} h,$$

vagyis az EE elsőrendben konvergens.

Ha figyelembe vesszük azt is, hogy az y_0 értéket ismerjük (ez nincs mindig így, néha csak közelítő értéket tudunk!), akkor kedvezőbb stabilitási konstanst is kaphatunk: $\tilde{S} = \frac{e^{L(T-t_0)} - 1}{L}$.

3.2.3. További módszerek elemzése

Az előzőekben végigjártunk egy hosszú utat, melynek során beláttuk, hogy az EE módszer konvergens, mégpedig elsőrendben. Ez azt jelenti, hogy ha felezzük a h lépésközt, akkor a hiba is nagyjából megfeleződik. (Az Olvasó indokolja meg, hogy miért csak nagyjából!) A bizonyítás két részből állt, a konzisztencia igazolása nem volt különösebben nehéz, csak Taylor-sorfejtést igényelt, míg a stabilitás igazolása már komolyabb kihívás volt.

A következőkben megnézzük, hogy miképp tudjuk más módszerek konvergenciáját igazolni. Az általános 3.2.23.Tétel ezekre is igaz, így - hasonlóan az EE-hez - felbonthatjuk a bizonyítást két részre. A konzisztencia igazolása teljesen hasonlóan fog menni. A stabilitás esetében, mely a legegyszerűbb módszer esetében is problematikus volt, azt várnánk, hogy még problematikusabb lesz. Szerencsére ez nincs így! Megmutatjuk, hogy stabilitás szempontjából a módszereink visszavezethetők az EE módszerre.

További egylépéses módszerek konzisztenciája.

Implicit-Euler módszer. Az $\mathcal{F}^h$ leképezés ebben az esetben

$$(\mathcal{F}^h(\mathbf{u}^h))_n = \begin{cases} \frac{u_n^h - u_{n-1}^h}{h} - f(t_n, u_n^h), & n = 1, \dots, N \\ u_0^h - y_0, & n = 0. \end{cases}$$

Hasonlóképp járunk el, mint az EE esetében. Ha $y \in C^2[t_0, T]$, akkor $\exists \xi_n \in (t_{n-1}, t_n)$, hogy

$$y(t_{n-1}) = y(t_n) - \dot{y}(t_n)h + \frac{\ddot{y}(\xi_n)}{2!}h^2,$$

vagyis

$$\frac{y(t_n) - y(t_{n-1})}{h} = \dot{y}(t_n) - \frac{\ddot{y}(\xi_n)}{2!}h.$$

Kihasználjuk, hogy $\exists M$, hogy $|\ddot{y}(t)| \leq M$, $\forall t \in [t_0, T]$. Így

$$|(\mathcal{F}^h(P^h(y)))_n| = \begin{cases} \left| \frac{y(t_n) - y(t_{n-1})}{h} - f(t_n, y(t_n)) \right| = \left| \frac{\ddot{y}(\xi_n)}{2!}h \right| \leq \frac{M}{2}h, & n = 1, \dots, N \\ 0, & n = 0. \end{cases}$$

Vagyis $\|\mathcal{F}^h(P^h(y))\|_\infty \leq \frac{M}{2}h \rightarrow 0$, ha $h \rightarrow 0$ és látjuk, hogy a konzisztencia az IE esetében is elsőrendű.

Trapéz módszer. Tfh. $y \in C^3[t_0, T]$. Ekkor T konzisztens, mégpedig másodrendben. Taylor sorfejtést alkalmazva kapjuk, hogy $\exists \xi_n^1, \xi_n^2 \in (t_{n-1}, t_n)$, hogy egyrészt

$$\frac{y(t_n) - y(t_{n-1})}{h} = \dot{y}(t_{n-1}) + \frac{\ddot{y}(t_{n-1})}{2!}h + \frac{\ddot{y}(\xi_n^1)}{3!}h^2,$$

másrészt

$$\dot{y}(t_n) = \dot{y}(t_{n-1}) + \frac{\ddot{y}(t_{n-1})}{2!}h + \frac{\ddot{y}(\xi_n^2)}{3!}h^2.$$

Innen kapjuk, hogy

$$|(\mathcal{F}^h(P^h(y)))_n| = \begin{cases} \left| \frac{y(t_n) - y(t_{n-1})}{h} - \frac{1}{2}(f(t_{n-1}, y(t_{n-1})) + f(t_n, y(t_n))) \right| \leq C h^2, & n = 1, \dots, N \\ 0, & n = 0. \end{cases}$$

A Heun-módszer. Ez a módszer explicit és jól szemlélteti az úgynevezett (explicit) Runge-Kutta módszerek felépítését.

$$\begin{cases} Y_n^1 = y_{n-1}^h \\ Y_n^2 = y_{n-1}^h + hf(t_{n-1}, y_{n-1}^h) \\ y_n^h = y_{n-1}^h + \frac{h}{2} (f(t_{n-1}, Y_n^1) + f(t_n, Y_n^2)) , \quad n = 1, \dots, N \\ y_0^h = y_0 , \quad n = 0 . \end{cases}$$

(Heun-módszer)

Segédváltozókat definiáltunk melyek segítségével állítjuk elő a következő időrétegen vett közelítést. A módszert úgy is felfoghatjuk, hogy explicitté tettük a trapéz-módszert, hiszen a jobb oldalon y_n^h helyett ennek egy közelítését Y_n^2 használtunk (egy lépés az EE-vel).

A Heun-módszer másodrendben konzisztens, melynek igazolását az Olvasóra bízunk.

Az RK4-módszer. Még magasabb konzisztenciarendet érhetünk el az úgynevezett "klasszikus" negyedrendű Runge-Kutta módszerrel:

$$\begin{cases} Y_1 = y_{n-1} \\ Y_2 = y_{n-1} + \frac{h}{2} f(t_{n-1}, Y_1) \\ Y_3 = y_{n-1} + \frac{h}{2} f(t_{n-\frac{1}{2}}, Y_2) \\ Y_4 = y_{n-1} + hf(t_{n-\frac{1}{2}}, Y_3) \\ y_n = y_{n-1} + \frac{h}{6} \left(f(t_{n-1}, Y_1) + 2f(t_{n-\frac{1}{2}}, Y_2) + 2f(t_{n-\frac{1}{2}}, Y_3) + f(t_n, Y_4) \right) , \quad n = 1, \dots, N \\ y_0^h = y_0 , \quad n = 0 , \end{cases}$$

(RK4)

ahol $x_{n-\frac{1}{2}} = x_0 + (n - \frac{1}{2})h$. Itt a negyedrendű konzisztencia igazolása már elég hosszadalmas lenne, így ezt nem részletezzük.

Egylépéses módszerek stabilitása. A konzisztencia igazolásához csak Taylor-sorfejtés szükséges, némely esetben ez persze türelmet igényel, de ez

csak technikai problémát jelent. A stabilitás igazolása viszont már más történet. Az EE esetében végigjártuk a hosszú utat és érthetően ennél bonyolultabb módszerek esetében, ha lehet, akkor ezt szeretnénk elkerülni. Szerencsére erre lehetőség is nyílik!

Ha a módszer explicit, akkor $\mathcal{F}^h$ felírható a következő alakban.

$$(\mathcal{F}^h(\mathbf{u}^h))_n = \begin{cases} \frac{u_n^h - u_{n-1}^h}{h} - \tilde{f}(h, t_{n-1}, u_{n-1}^h), & n = 1, \dots, N \\ u_0^h - y_0, & n = 0, \end{cases}$$

ahol $\tilde{f}$ szintén folytonos és ha h elég kicsi, akkor a harmadik változójában egyenletesen Lipschitzes, ami azt jelenti, hogy a Lipschitz konstans h -tól független.

3.2.26. Példa. Tekintsük a (teszt-egyenlet)-et és alkalmazzuk rá a Heun-módszert! Ekkor

$$(\mathcal{F}^h(\mathbf{y}^h))_n = \begin{cases} \frac{y_n^h - y_{n-1}^h}{h} - \underbrace{\frac{\lambda(2 + h\lambda)}{2}}_{\tilde{f}} y_{n-1}^h, & n = 1, \dots, N \\ y_0^h - y_0, & n = 0, \end{cases}$$

mely $\tilde{f}$ valóban folytonos és a harmadik változójában Lipschitzes:

$$\left| \frac{\lambda(2 + h\lambda)}{2} \right| \geq |\lambda| + 1 = L,$$

amennyiben h elég kicsi.

Implicit esetben

$$(\mathcal{F}^h(\mathbf{u}^h))_n = \begin{cases} \frac{u_n^h - u_{n-1}^h}{h} - \hat{f}(h, t_{n-1}, u_{n-1}^h, u_n^h), & n = 1, \dots, N \\ u_0^h - y_0, & n = 0, \end{cases}$$

alakban írhatjuk fel a módszert, ahol $\hat{f}$ szintén folytonos és a harmadik, illetve negyedik változójában egyenletesen Lipschitzes.

Az úgynevezett *implicit függvény tétel* következményeként, amennyiben h elég kicsi, $\exists \tilde{f}$ úgy, hogy u_n^h egy környezetében $\mathcal{F}^h$ megadható

$$(\mathcal{F}^h(\mathbf{u}^h))_n = \begin{cases} \frac{u_n^h - u_{n-1}^h}{h} - \tilde{f}(h, t_{n-1}, u_{n-1}^h), & n = 1, \dots, N \\ u_0^h - y_0, & n = 0, \end{cases}$$

alakban, ahol $\tilde{f}$ szintén folytonos és a harmadik változójában egyenletesen Lipschitzes. Vagyis az implicit alakot át tudjuk konvertálni explicit alakra (elvieken).

Ez persze nem azt jelenti, hogy minden esetben ténylegesen meg tudjuk mondani, hogy mi az $\hat{f}$ -hoz tartozó $\tilde{f}$, de azt állíthatjuk, hogy létezik és ráadásul egyenletesen Lipschitzes is (egy környezetben). Tehát, ha h -t elég kicsinek választjuk, akkor minden módszer hasonlóan kezelhető, mint az EE.

3.2.27. Példa. Tekintsük a (teszt-egyenlet)-et és alkalmazzuk rá az IE-t! Ekkor

$$(\mathcal{F}^h(\mathbf{y}^h))_n = \begin{cases} \frac{y_n^h - y_{n-1}^h}{h} - \underbrace{\frac{\lambda}{1 - h\lambda} y_{n-1}^h}_{\tilde{f}}, & n = 1, \dots, N \\ y_0^h - y_0, & n = 0, \end{cases}$$

mely $\tilde{f}$ valóban folytonos és a harmadik változójában Lipschitzes:

$$\left| \frac{\lambda}{1 - h\lambda} \right| \geq 2|\lambda| = L,$$

amennyiben h elég kicsi.

3.2.28. Példa. Tekintsük a 3.1.4.Példát és alkalmazzuk rá az IE-t! Ekkor

$$(\mathcal{F}^h(\mathbf{y}^h))_n = \begin{cases} \frac{y_n^h - y_{n-1}^h}{h} - \underbrace{e^{-y_n^h}}_{\tilde{f}}, & n = 1, \dots, N \\ y_0^h - y_0, & n = 0, \end{cases}$$

melyet nem tudjuk átírni explicit alakra, ahogy ezt korábban megállapítottuk. (Ez implikálta az egyszerű iteráció és a Newton-iteráció áttekintését.) Figyelem, ez nem jelenti azt, hogy nem létezik a megfelelő $\tilde{f}$ függvény (a megfelelő tulajdonságokkal)! Csupán annyit, hogy zárt alakban nem tudjuk megadni.

Ez azt eredményezi, hogy teszőleges egylépéses módszer esetében az EE esetében vett stabilitási bizonyítás egy az egyben megismételhető. (Ehhez ugyanis nem kell konkrétan megadnunk $\tilde{f}$ -et, csak a létezése kell és a Lipschitzessége.)

3.2.4. Matlab

A Matlab rendelkezik beépített megoldóalgoritmusokkal. Ha tudjuk, hogy melyik milyen típusú problémára való, és hogyan kell használni, akkor nem kell külön megírunk a kódot.

- Ezek a beépített algoritmusok nem állandó lépésközzel dolgoznak. Ez azért jó, mert ahol a megoldás sima, akkor nagy lépést is tehetünk úgy, hogy a hiba nem lesz jelentős, míg ahol a megoldás gyorsan változik, akkor kell kis lépésköz. Ezzel az eljárással munkát spórolhatunk meg, hiszen kevesebb lépésre lesz összességében szükség. Az egy külön terület, hogy miképp érdemes a lépésközt választani, hiszen a megoldást nem ismerjük.
- Alapból valamely explicit módszert szeretnénk alkalmazni, hiszen ennek a számításigénye kisebb lépésenként, mint az implicit módszereké. Ugyanakkor korábban láttuk, hogy vannak olyan típusú problémák, az úgynevezett *merev feladatok*, melyek esetében mégis implicit módszerek mellett érdemes dönteni. A probléma általában az, hogy alapból nem tudjuk, hogy merev-e egy feladat, avagy sem. Ennek eldöntése komoly feladat, mi itt csak annyit tanácsolhatunk, hogy próbálkozzunk először egy explicit módszerrel és ha ez szemmel láthatólag nagyon lassú, vagy nem ad megfelelő eredményt (ezt persze szintén nem mindig egyszerű eldönteni), akkor váltsunk implicit módszerre.

A következőkben bemutatjuk a két legfontosabb beépített megoldóalgoritmust.

A legnépszerűbb nem merev megoldó az ode45 algoritmus, mely nem merev feladat esetében gyorsan nagy pontosságra képes.

```
function bis(lambda, reltol, abstol)
% ode45 applied to the test equation
% e.g. bis(-10,1e-6,1e-7)

options = odeset('RelTol',reltol,'AbsTol',abstol);
[T,Y] = ode45(@testeq,[0 2],1,options,lambda);

s=size(T);
steps=s(1)-1 % number of steps
S=zeros(steps,1);
```

```

for i=1:steps
    S(i)=T(i+1)-T(i);
end

for j=1:s(1)
    solution(j)=exp(lambda*T(j)); % the solution of the IVP
end

errorvect=abs(solution'-Y);
maxerror=max(abs(errorvect))

subplot(1,3,1)
plot(T,Y)
title(['Numerical approximation'])
subplot(1,3,2)
plot(T,errorvect)
title(['Error'])
subplot(1,3,3)
plot(S)
title(['Stepsize'])
end
%
function dy = testeq(t,y,lambda)
dy = lambda*y;
end

```

Merev differenciálegyenletek kezelésére az ode15s a legnépszerűbb választás. A 3.1.15. Példán mutatjuk be a működését, mely $\lambda \ll 0$ esetben merev.

```

function egyperbtbis(lambda, reltol, abstol)
% y'(t)=lambda*(t*y^2(t)-1/t)-1/t^2;
% y(1)=1
% numerikus megoldasa
% pl. egyperbtbis(-50,10e-7,10e-6)
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

options = odeset('RelTol',reltol,'AbsTol',abstol);
[T,Y] = ode15s(@diff1,[1 25],1,options,lambda);

s=size(T);
steps=s(1)-1 % number of steps
S=zeros(steps,1);

for i=1:steps
    S(i)=T(i+1)-T(i);

```

3.2. NUMERIKUS MEGOLDÁSI MÓDSZEREK – ELMÉLETI RÉSZ 103

```
end
for j=1:s(1)
    solution(j)=pl1(T(j)); % the solution of the IVP
end

errorvect=abs(solution'-Y);
maxerror=max(abs(errorvect))

subplot(1,3,1)
plot(T,Y)
title(['Numerical approximation'])
subplot(1,3,2)
plot(T,errorvect)
title(['Error'])
subplot(1,3,3)
plot(S, '.')
title(['Stepsize'])
end

%
% a (pontos) megoldas:
function ered=pl1(t)
ered=1/t;
end

%
% a diffegyenlet:
function dy=diff1(t,y,lambda)
dy=lambda*(t*y^2-1/t)-1/t^2;
end
```

Az Olvasó figyelmébe ajánljuk, hogy oldja meg ezt a példát ode45-tel is és vonja le a tanulságokat! További beépített algoritmusok is rendelkezésre állnak, melyek pontos leírását megtalálhatjuk a Matlab Help-jében.

DRAFT

4. fejezet

Közönséges differenciálegyenletrendszerek

Eddig olyan egyenletekkel foglalkoztunk melyek egy ismeretlen függvényt tartalmaztak. A következő viszont nem ilyen.

$$\begin{cases} \dot{u}(t) = tu(t) + t^2v(t) \\ u(0) = 1 \\ \dot{v}(t) = u(t) - v(t) + 2tw(t) \\ v(0) = 2 \\ \dot{w}(t) = u(t) - \frac{v(t)}{1+t} \\ w(0) = 1 \end{cases}$$

Három ismeretlen függvény, u , v , w szerepel három egyenletben és ezek az egyenletek nem kezelhetők külön-külön, mivel "össze vannak fűzve". Továbbá mindegyik függvényhez tartozik egy-egy kezdetiérték is.

Az ilyen típusú problémák megfogalmazhatóak az alábbi módon:

4.0.1. Definíció. Legyen $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$ nyílt és korlátos halmaz, $\mathbf{f} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ folytonos függvény. Hasonlóan az egydimenziós esethez, kezdetiérték problémának nevezzük a következő egyenletet.

$$\begin{cases} \mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}_0 \\ \dot{\mathbf{y}}(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{y}(t)) \end{cases} \quad (\text{KÉP})$$

ahol $\mathbf{y} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^d$ a keresett függvény.

4.0.2. Példa. A bevezető példa lefordítható a definícióban megadott nyelvre:

$$\mathbf{y}(t) = \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \\ w(t) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{y}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}(t, \mathbf{y}(t)) = \begin{pmatrix} tu(t) + t^2v(t) \\ u(t) - v(t) + 2tw(t) \\ u(t) - \frac{v(t)}{1+t} \end{pmatrix}.$$

4.0.3. Példa. Tekintsük a harmonikus oszcillátor egyenletét (1.6) és vezessünk be a $v(t)$ segédfüggvényt, mely a test (előjeles) sebességet adja meg. Ekkor a másodrendű egyenlet átírható elsőrendű rendszerré:

$$m\ddot{x}(t) = -kx(t) \quad \rightsquigarrow \begin{cases} \dot{x}(t) = v(t) \\ \dot{v}(t) = -\frac{k}{m}x(t) \end{cases}.$$

Mátrix-vektoros írásmóddal ez még kompaktabb formába önthető:

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ v(t) \end{pmatrix}^{\cdot} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ v(t) \end{pmatrix},$$

amit sokszor még rövidebben

$$\begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix}^{\cdot} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix}$$

alakban adunk meg.

A Matlab képes kezelni a már átírt alakot is:

```
syms x(t) v(t) m k
eqns = [diff(x,t)==v, diff(v,t)==-k/m*x];
sol = dsolve(eqns)
solx(t) = sol.x
solv(t) = sol.v
```

Válaszként a következőket kapjuk:

```
sol =
  struct with fields:

    v: [1x1 sym]
    x: [1x1 sym]
```



```

solx(t) =
(C2*exp(-(t*(-k*m)^(1/2))/m)*(-k*m)^(1/2))/k - (C1*exp((t*(-k*m)^(1/2))/m)*(-k*m)^(1/2))

solv(t) =
C1*exp((t*(-k*m)^(1/2))/m) + C2*exp(-(t*(-k*m)^(1/2))/m)

```

Abban az esetben, mikor $k = m = 1$:

```

syms x(t) v(t)
eqns = [diff(x,t)==v, diff(v,t)==-x];
sol = dsolve(eqns)
solx(t) = sol.x
solv(t) = sol.v

```

Válaszként a következőket kapjuk:

```

sol =
  struct with fields:

    v: [1x1 sym]
    x: [1x1 sym]

```

```

solx(t) =
C4*cos(t) + C3*sin(t)

```

```

solv(t) =
C3*cos(t) - C4*sin(t)

```

Ha visszatérünk az általános esetre, de csatoljuk az $x(0) = -1$ és $v(0) = 0$ kezdeti feltételeket, akkor:

```

syms x(t) v(t) m k
eqns = [diff(x,t)==v, diff(v,t)==-k/m*x];
cond = [x(0)==-1, v(0)==0];
sol = dsolve(eqns,cond)
solx(t) = simplify(sol.x)
solv(t) = simplify(sol.v)

```

Válaszként a következőket kapjuk:

```

sol =
  struct with fields:

```

```

v: [1x1 sym]
x: [1x1 sym]

solx(t) =
-cos((k^(1/2)*t)/m^(1/2))

solv(t) =
(k*sinh((t*(-k*m)^(1/2))/m))/(-k*m)^(1/2)

```

Az utolsó válasz kicsit zavarba ejtő lehet, az Olvasó járjon utána!

Ez az eljárás elvégezhető általánosabb esetben is. Tekintsük az

$$y^{(n)}(t) = a_0(t)y(t) + a_1(t)\dot{y}(t) + \dots + a_{n-1}(t)y^{(n-1)}(t) + f(t)$$

n -ed rendű lineáris differenciálegyenletet, ahol $y^{(k)}(t)$ az $y(t)$ függvény k -adik deriváltját jelenti. Bevezetve az $y_0(t)$, $y_1(t)$, $\dots$ $y_{n-1}(t)$ segédfüggvényeket, ezt át tudjuk írni egy lineáris rendszerré:

$$\begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_{n-1} \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ a_0 & a_1 & \dots & \dots & a_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_{n-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ f \end{pmatrix}$$

4.0.4. Példa. Az átalakítás egy része elvégezhető nemlineáris esetben is. Tekintsük a harmonikus oszcillátor egyenletének egy változatát, amikor a visszatérítő erő nem lineáris: $F(t) = -k \operatorname{sign}(x(t)) |x(t)|^{\frac{1}{2}}$. Ekkor :

$$m\ddot{x}(t) = -k \operatorname{sign}(x(t)) |x(t)|^{\frac{1}{2}} \rightsquigarrow \begin{cases} \dot{x}(t) = v(t) \\ \dot{v}(t) = -\frac{k}{m} \operatorname{sign}(x(t)) |x(t)|^{\frac{1}{2}} \end{cases}$$

Vagyis

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ v(t) \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} v(t) \\ -\frac{k}{m} \operatorname{sign}(x(t)) |x(t)|^{\frac{1}{2}} \end{pmatrix}.$$

4.0.5. Megjegyzés. • Ahogy azt a példák is mutatják, magasabbrendű egyenletek átírhatóak elsőrendű rendszerré.

- Elsőrendű rendszerek esetében a 2.1.19.Tétel szintén érvényes, vagyis, ha feltesszük, hogy $\mathbf{f}$ Lipschitzes a második változójában (mely azt jelenti, hogy $\mathbf{f}(t, \mathbf{y}(t)) = \mathbf{f}(t, y_1(t), y_2(t), \dots, y_d(t))$ jobboldalra igaz, hogy y_i Lipschitzes $\forall 1 \leq i \leq d$), akkor létezik és egyértelmű a megoldás.
- Ugyanakkor, mivel már egy dimenzióban is problémát okozott, hogy differenciálegyenletek megoldását zárt alakban megadjuk, itt ez hatványozottan igaz. Gyakorlatilag (néhány kivételtől eltekintve) csak állandó együtthatós lineáris rendszereket tudunk megoldani. Így, egyrészt áttekintjük ezt az esetet, másrészt előtérbe kerül a kvalitatív megközelítés, illetve a numerikus módszerek használata.

4.1. Lineáris rendszerek

4.1.1. Állandó együtthatós lineáris rendszerek megoldása

Elsőrendű, állandó együtthatós homogén differenciálegyenletrendszerek.

Haladjunk az egyszerűtől a bonyolultabb felé, így a következőkben az

$$\dot{\mathbf{y}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{y}(t) \quad (4.1)$$

állandó együtthatós lineáris homogén rendszerekkel foglalkozunk, ahol $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{d \times d}$ egy mátrix. Vegyük észre, hogy a 4.0.3.Példa harmonikus oszcillátora pont ilyen alakra volt hozható.

Tekintsük a következő analógiát, ahol a korábban sokszor előkerült teszt-egyenletet (hiszen ez a skalár megfelelője) vetjük össze (4.1)-rel. Legyen tehát $a \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \begin{cases} y(0) = y_0 \\ \dot{y}(t) = a y(t) \end{cases} &\rightsquigarrow \begin{cases} \mathbf{y}(0) = \mathbf{y}_0 \\ \dot{\mathbf{y}}(t) = \mathbf{A} \mathbf{y}(t) \end{cases} \\ y(t) = e^{at} y_0 &\rightsquigarrow \mathbf{y}(t) = e^{\mathbf{A}t} \mathbf{y}_0 \quad ? \end{aligned}$$

A skalár esetet kimerítően ismerjük és az egyenletek analógiája nem kérdéses, ugyanakkor nem világos, hogy ebből következtethetünk-e egy alakilag hasonló megoldásra. Vegyük észre, hogy az sem világos, hogy mit értünk az $e^{\mathbf{A}t}$ kifejezésen és miért feltételeztük, hogy a megoldás $e^{\mathbf{A}t} \mathbf{y}_0$ alakú és miért nem $\mathbf{y}_0 e^{\mathbf{A}t}$ alakú?

Először is leszögezzük, hogy érdemes az analógiát követni, de ehhez meg kell válaszoljuk a felmerült kérdéseket és még továbbiakat is.

Elsőnek a mátrix exponenciális függvényének fogalmát vezetjük be.

$$e^{\mathbf{A}t} := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\mathbf{A}t)^k}{k!}, \quad (4.2)$$

mely formula értelmesnek tűnik, mert ezen mátrixműveletek értelmezve vannak, egyedül az kérdéses, hogy a végtelen összeg értelmezhető-e. Egy pillanatra tegyük fel, hogy valamely t -re igen. A kérdés az, hogy erre a t -re milyen objektum $e^{\mathbf{A}t}$? Egy mátrix! Az Olvasó vegye észre, hogy ez azt is megmagyarázza, hogy miért $e^{\mathbf{A}t} \mathbf{y}_0$ alakkal és miért nem $\mathbf{y}_0 e^{\mathbf{A}t}$ alakkal próbálkozunk! Ha t -t változónak tekintjük, akkor pedig egy $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{d \times d}$ (valós számhoz mátrixot rendelő) függvény. Most megmutatjuk, hogy (4.2) minden $t \in \mathbb{R}$ esetén értelmes:

$$\left\| \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\mathbf{A}t)^k}{k!} \right\| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\|\mathbf{A}\| |t|)^k}{k!} \leq e^{\|\mathbf{A}\| |t|} < \infty.$$

Következésként bebizonyítjuk az alábbi lemmát:

4.1.1. Lemma.

$$\frac{d}{dt} e^{\mathbf{A}t} = e^{\mathbf{A}t} \mathbf{A} = \mathbf{A} e^{\mathbf{A}t}.$$

Bizonyítás. Ez egyrészt a differenciálhatóságot jelenti, és ahogy várjuk a derivált $\mathbf{A} e^{\mathbf{A}t}$. Másrészt $\mathbf{A}$ felcserélhetőségét az exponenciális függvényével.

A differenciálhatóság valós-valós függvényekre vonatkozó 5.1.10. Definícióját kicsit átfogalmazzuk: $\lim_a \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a)$ helyett a $\left| \lim_a \frac{f(x) - f(a)}{x - a} - f'(a) \right| =$

0 vizsgálatával ellenőrizzük, hogy a jelölt valóban a deriváltfüggvény-e. Ennek magasabbdimenziós változata csak annyiban különbözik, hogy abszolútérték helyett normát használunk.

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left\| \frac{e^{\mathbf{A}(t+\Delta t)} - e^{\mathbf{A}t}}{\Delta t} - e^{\mathbf{A}t} \mathbf{A} \right\| &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left\| e^{\mathbf{A}t} \left(\frac{e^{\mathbf{A}\Delta t} - \mathbf{I}}{\Delta t} - \mathbf{A} \right) \right\| \leq \\ \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \|e^{\mathbf{A}t}\| \left\| \left(\frac{e^{\mathbf{A}\Delta t} - \mathbf{I} - \mathbf{A}\Delta t}{\Delta t} \right) \right\| &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\|e^{\mathbf{A}t}\|}{|\Delta t|} \left\| \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(\mathbf{A}\Delta t)^k}{k!} \right\| \leq \\ \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\|e^{\mathbf{A}t}\|}{|\Delta t|} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(\|\mathbf{A}\| |\Delta t|)^k}{k!} &\leq \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\|e^{\mathbf{A}t}\|}{|\Delta t|} \sum_{k=2}^{\infty} |\Delta t|^2 \frac{\|\mathbf{A}\|^k |\Delta t|^{k-2}}{k!} \leq \\ \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \|e^{\mathbf{A}t}\| |\Delta t| \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\|\mathbf{A}\|^k}{k!} &\leq \lim_{\Delta t \rightarrow 0} |\Delta t| \|e^{\mathbf{A}t}\| e^{\|\mathbf{A}\|} = 0. \end{aligned}$$

A felcserélhetőség igazolásához csak a mátrixexponenciális (4.2) definícióját kell használnunk. $\square$

Innen már következik, hogy a megoldás valóban $\mathbf{y}(t) = e^{\mathbf{A}t} \mathbf{y}_0$.

A mátrixexponenciális kiszámítása. Van egy formulánk a megoldásra, de ez korántsem jelenti azt, hogy nincsenek gyakorlati nehézségek a megoldás tényleges kiszámítása során. Ha azt a kézenfekvő utat választjuk, hogy meghatározzuk az $e^{\mathbf{A}t}$ mátrixexponenciális, majd képezzük a $e^{\mathbf{A}t} \mathbf{y}_0$ szorzatot, akkor a kérdés az, hogy miként számítjuk ki a mátrixexponenciális. Hogy az Olvasó is megéreze ennek nehézségét, oldja meg a következő feladatot! Itt a legegyszerűbb esettől haladunk a bonyolultabbak felé, de csak két dimenzióban.

1. Számítsuk ki definíció szerint az alábbi mátrixokra $e^{\mathbf{A}t}$ -t!

$$(a) \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \quad (b) \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (c) \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad (d) \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Elsőnek megjegyezzük, hogy a (c) rész a harmonikus oszcillátorhoz tartozó mátrix, amennyiben $m = k = 1$. Másrészt arra juthatunk, hogy ha $\mathbf{A}$ diagonális mátrix, akkor a feladat nem okoz problémát, ellenben ha nem diagonális, akkor az exponenciális függvény kiszámítása már 2D-ben is komoly munkát jelent, ha nyers erővel próbáljuk meghatározni. A kérdés az, hogy van-e valamilyen módszer, mely leegyszerűsíti ezt a számítást.

4.1.2. Megjegyzés. Tekintsük először azt az esetet, amikor $\mathbf{A}$ diagonalizálható, vagyis $\mathbf{A} = \mathbf{S}\mathbf{D}\mathbf{S}^{-1}$, ahol $\mathbf{S} \in \mathbb{R}^{d \times d}$ az oszlopaiban tartalmazza $\mathbf{A}$ sajátvektorait, illetve $\mathbf{D} \in \mathbb{R}^{d \times d}$ diagonális mátrix, mely a diagonálisában tartalmazza $\mathbf{A}$ megfelelő sajátértékeit. Az Olvasó gondolja végig, hogy a diagonalizálhatóság pontosan azt jelenti, hogy $\mathbf{A}$ -nak van d db független sajátvektora és ebben az esetben $\mathbf{A}\mathbf{S} = \mathbf{S}\mathbf{D}$ teljesül. Ezt fel tudjuk használni a mátrixexponenciális kiszámításának egyszerűsítésére, hiszen

$$\mathbf{A}^k = \mathbf{S}\mathbf{D}^k\mathbf{S}^{-1},$$

és így

$$e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{S} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\mathbf{D}t)^k}{k!} \right) \mathbf{S}^{-1} = \mathbf{S} e^{\mathbf{D}t} \mathbf{S}^{-1},$$

ahol $e^{\mathbf{D}t}$ már könnyen kiszámítható.

A problémás eset az, ha $\mathbf{A}$ nem diagonalizálható. Ekkor is igaz az, hogy közel diagonális alakra hozható, ún. Jordan-féle normálalakra. Ekkor $\mathbf{A} = \mathbf{SJS}^{-1}$, ahol $\mathbf{J}$ diagonális és majdnem diagonális blokkokból áll, melyek a következőképp néznek ki.

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda & 1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Számítsuk ki definíció szerint az alábbi mátrixokra $e^{\mathbf{A}t}$ -t, és így kezelhetővé tudjuk tenni a nem diagonalizálható esetet is!

$$(a) \quad \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \quad (b) \quad \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \quad (c) \quad \text{Végül teszőleges méretre!}$$

A mátrixexponenciális kiszámítását le tudjuk egyszerűsíteni a sajátértékek és sajátvektorok meghatározására. De nagyméretű mátrix esetén még ez is problematikus lehet.

Vannak további lehetőségek is a mátrixexponenciális kiszámítására, mint például a Hermit-féle interpolációs polinomot használó módszer, de mi egy alapvetően más utat választunk.

Mi lenne, ha a mátrixexponenciális kiszámítása nélkül rögtön a $e^{\mathbf{A}t} \mathbf{y}_0$ kifejezést próbálnánk meg kiszámítani?

Legyen $\mathbf{v}$ egy sajátvektora az $\mathbf{A}$ mátrixnak λ sajátértékkel. Ekkor

$$e^{\mathbf{A}t} \mathbf{v} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\mathbf{A}t)^k}{k!} \mathbf{v} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} (\mathbf{A}^k \mathbf{v}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} (\lambda^k \mathbf{v}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^k}{k!} \mathbf{v} = e^{\lambda t} \mathbf{v}$$

vagy egy kevésbé logikusnak tűnő, másik igazolást is tekinthetünk, mely később fog hasznosnak bizonyulni:

$$e^{\mathbf{A}t} \mathbf{v} = e^{(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})t + \lambda \mathbf{I}t} \mathbf{v} = e^{\lambda t} e^{(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})t} \mathbf{v} = e^{\lambda t} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k (\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})^k}{k!} \right) \mathbf{v} =$$

$$e^{\lambda t} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} (\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})^k \mathbf{v} = e^{\lambda t} \mathbf{v}$$

Az utolsó egyenlőség onnan adódik, hogy $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})^k \mathbf{v} = \mathbf{0}$, ha $k = 1, 2, \dots$, illetve $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})^0 \mathbf{v} = \mathbf{I}\mathbf{v} = \mathbf{v}$, hiszen $\mathbf{v}$ sajátvektor.

Tegyük fel, hogy a kezdővektor előáll sajátvektorok lineáris kombinációjaként:

$$\mathbf{y}_0 = \sum_{i=1}^d \alpha_i \mathbf{v}_i,$$

ekkor

$$e^{\mathbf{A}t} \mathbf{y}_0 = \sum_{i=1}^d \alpha_i e^{\lambda_i t} \mathbf{v}_i.$$

4.1.3. Példa. Tekintsük a következő rendszert:

$$\begin{cases} \dot{y}_1(t) = y_1(t) - y_2(t) \\ \dot{y}_2(t) = -4y_1(t) + y_2(t) \\ y_1(0) = 1 \\ y_2(0) = 1 \end{cases}$$

melyet átírunk a szokott módon:

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{y}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

majd meghatározzuk a sajátérték-sajátvektor párokat: $\lambda_1 = 3$, $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$,

$\lambda_2 = -1$, $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. A megoldás tehát

$$\mathbf{y}(t) = \alpha_1 e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \alpha_2 e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

alakban adható meg, ahol az α_i együtthatókat a kezdővektor segítségével határozhatjuk meg. A kezdővektort előállítjuk a sajátvektorok lineáris kombinációjaként (ez egy lineáris egyenletrendszer megoldását igényli):

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \frac{3}{4} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

tehát $\alpha_1 = \frac{1}{4}$, $\alpha_2 = \frac{3}{4}$, a megoldás pedig $\mathbf{y}(t) = \frac{1}{4} e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \frac{3}{4} e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, vagyis

$$\mathbf{y}(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} e^{3t} + \frac{3}{4} e^{-t} \\ -\frac{1}{2} e^{3t} + \frac{3}{2} e^{-t} \end{pmatrix}.$$

Vegyük észre, hogy ez pont a diagonalizálható esetet fedi le, van két független sajátvektorunk, amik így bázist alkotnak, vagyis tetszőleges $\mathbf{y}_0$ egyértelműen felírható, mint ezek lineáris kombinációja. A kérdés itt is az, hogy mi a helyzet a kellemetlen nem diagonalizálható esetben? Ez akkor fordul elő, ha egy többszörös sajátértékhez nem tartozik annyi sajátvektor, mint amennyi a multiplicitása. A cél az, hogy ebben az esetben a sajátvektorok rendszerét ki szeretnénk egészíteni bázissá, de nem tetszőleges vektorokkal, hanem olyanokkal, amik esetében a mátrixexponenciálissal vett szorzat egyszerűen kiszámítható. Azt nem várhatjuk, hogy olyan egyszerűen, mint a sajátvektorok esetében, de közel olyan egyszerűen. Ennek a szerepnek fognak megfelelni az általánosított sajátvektorok.

4.1.4. Definíció. Azt mondjuk, hogy az $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ a λ sajátértékhez tartozó p -edrendű általánosított sajátvektor, ha

$$(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})^p \mathbf{u} = \mathbf{0}, \quad (\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})^k \mathbf{u} \neq \mathbf{0}, \quad k = 1, \dots, p-1$$

A definíció szerint a sajátvektorok pont az elsőrendű általánosított sajátvektorok. Megmutatható, hogy minden $\mathbb{R}^{d \times d}$ mátrix esetében a sajátvektorok rendszere kiegészíthető bázissá az általánosított sajátvektorok segítségével. (Ennek igazolása nem triviális, kicsit hosszadalmas is, így itt eltekintünk tőle. Az érdeklődő Olvasó megpróbálhatja bebizonyítani, mert nem is annyira nehéz.)

4.1.5. Példa. Tekintsük a következő mátrixot:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Ennek van egy kétszeres sajátértéke és csak egy sajátvektor tartozik hozzá.

$$\lambda = 1, \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

Ugyanakkor találhatunk egy másodrendű általánosított sajátvektort. A definíciót alkalmazva az $(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})^2 \mathbf{u} = \mathbf{0}$ egyenlet egy megoldását szeretnénk megtalálni, de praktikusán inkább az

$$(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) \mathbf{u} = \mathbf{v}, \quad \mathbf{u} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

egyenlet megoldásaként találtuk meg a(z egyik) megfelelő vektort. Figyelem, ahogy a sajátvektor is csak skalár szorzó erejéig egyértelmű, így az általánosított sajátvektor is csak bizonyos értelemben egyértelmű. Tetszőleges skalárszorosa is megfelelő, de tetszőleges lineáris kombinációja a sajátvektorral is megfelelő.

Az általánosított sajátvektorok valóban kellemesen kezelhetők: tekintsük a λ sajátértékhez tartozó p -edrendű $\mathbf{u}$ általánosított sajátvektort. Ekkor

$$e^{\mathbf{A}t}\mathbf{u} = e^{(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})t+\lambda\mathbf{I}t}\mathbf{u} = e^{\lambda t}e^{(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})t}\mathbf{u} =$$

$$e^{\lambda t} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k (\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})^k}{k!} \right) \mathbf{u} = e^{\lambda t} \sum_{k=0}^{p-1} \frac{t^k}{k!} (\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})^k \mathbf{u}.$$

Vagyis a végtelen összeg valójában itt is csak egy véges összeg, pontosan p összeadandó taggal. Az általános eljárás pedig a következő:

$$\mathbf{y}_0 = \sum \alpha_i \mathbf{v}_i + \sum \beta_j \mathbf{u}_j$$

ahol $\mathbf{v}_i$ -k a sajátvektorok, míg $\mathbf{u}_j$ -k az általánosított sajátvektorok, melyek együtt bázist alkotnak. Ekkor

$$e^{\mathbf{A}t}\mathbf{y}_0 = e^{\mathbf{A}t} \left(\sum \alpha_i \mathbf{v}_i + \sum \beta_j \mathbf{u}_j \right) = \sum \alpha_i e^{\mathbf{A}t}\mathbf{v}_i + \sum \beta_j e^{\mathbf{A}t}\mathbf{u}_j,$$

ahol az egyes tagokat már tudjuk, hogy miképp kell kiszámolni.

4.1.6. Példa. Oldjuk meg az

$$\begin{cases} \mathbf{y}(0) = \mathbf{y}_0 \\ \dot{\mathbf{y}}(t) = \mathbf{A} \mathbf{y}(t) \end{cases}$$

egyenletet, ahol a mátrix a 4.1.5.Példa mátrixa, a kezdővektor pedig

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{y}_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Melynek már kiszámítottuk a sajátértékét és sajátvektor, általánosított sajátvektor rendszerét:

$$\lambda = 1, \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Ekkor

$$e^{\mathbf{A}t}\mathbf{v} = e^t\mathbf{v}, \quad e^{\mathbf{A}t}\mathbf{u} = e^t(\mathbf{u} + t(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{u}) = e^t(\mathbf{u} + t\mathbf{v}),$$

vagyis a megoldás

$$\mathbf{y}(t) = \alpha e^t\mathbf{v} + \beta e^t(\mathbf{u} + t\mathbf{v})$$

alakú. Az együtthatókat a kezdeti feltétel szolgáltatja:

$$\mathbf{y}_0 = \alpha \mathbf{v} + \beta \mathbf{u},$$

aminek a megoldása $\alpha = 1, \beta = 2$. Tehát:

$$\mathbf{y}(t) = e^t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + 2e^t \left[\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right] = 2e^t \begin{pmatrix} 1+t \\ -t \end{pmatrix}.$$

Változtassunk egy kicsit a kezdeti feltételen. Tekintsük a következő rendszert:

$$\begin{cases} \mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}_0 \\ \dot{\mathbf{y}}(t) = \mathbf{A} \mathbf{y}(t) \end{cases}$$

Könnyű leellenőrizni, hogy

$$\mathbf{y}(t) = e^{\mathbf{A}(t-t_0)} \mathbf{y}_0$$

megoldás.

Elsőrendű, állandó együtthatós inhomogén differenciálegyenlet rendszer.

Tekintsük az alábbi kezdetiértékproblémát,

$$\begin{cases} \mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}_0 \\ \dot{\mathbf{y}}(t) = \mathbf{A} \mathbf{y}(t) + \mathbf{b}(t) \end{cases}$$

ahol $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{d \times d}$, $\mathbf{b} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^d$ folytonos függvény. Alkalmazzuk a beszorzós trükköt:

$$e^{-\mathbf{A}t} (\dot{\mathbf{y}}(t) - \mathbf{A} \mathbf{y}(t)) = e^{-\mathbf{A}t} \mathbf{b}(t),$$

ahol a bal oldalt át tudjuk alakítani:

$$(e^{-\mathbf{A}t} \mathbf{y}(t))' = e^{-\mathbf{A}t} \mathbf{b}(t),$$

amit kiintegrálunk t_0 -tól t -ig, a bal oldalra alkalmazzuk a Newton-Leibniz szabályt:

$$e^{-\mathbf{A}t} \mathbf{y}(t) - e^{-\mathbf{A}t_0} \mathbf{y}(t_0) = \int_{t_0}^t e^{-\mathbf{A}s} \mathbf{b}(s) \, ds,$$

vagyis

$$\mathbf{y}(t) = e^{\mathbf{A}(t-t_0)} \mathbf{y}_0 + \int_{t_0}^t e^{\mathbf{A}(t-s)} \mathbf{b}(s) \, ds. \quad (4.3)$$

Ez rendszerekre a konstans variációs formula. Vessük össze (4.3)-t (1.3)-el!

4.1.7. Példa.

$$\begin{cases} \dot{y}_1(t) = y_1(t) - y_2(t) + 1 \\ \dot{y}_2(t) = -4y_1(t) + y_2(t) + t \end{cases}$$

Vegyük észre, hogy ennek homogén része már szerepelt a 4.1.3.Példában. Írjuk át a feladatot mátrix-vektoros alakra:

$$\begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix}.$$

Alkalmazzuk (4.3)-t. Ez egyrészt azt jelenti, hogy meg kell határozzuk $e^{\mathbf{A}(t-t_0)}\mathbf{y}_0$ -t, ami a homogén egyenlet megoldása, vagyis

$$e^{\mathbf{A}(t-t_0)}\mathbf{y}_0 = \alpha_1 e^{3(t-t_0)} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \alpha_2 e^{-(t-t_0)} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Másrészt meg kell határoznunk $\int_{t_0}^t e^{\mathbf{A}(t-s)}\mathbf{b}(s) ds$ -t. Ehhez először felbontjuk

$\mathbf{b}(t)$ -t a sajátvektorok lineáris kombinációjára (ez egy lineáris egyenletrendszer megoldását igényli):

$$\mathbf{b}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix} = \left[\frac{1}{2} - \frac{t}{4} \right] \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \left[\frac{1}{2} + \frac{t}{4} \right] \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Majd ezt felhasználva:

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^t e^{\mathbf{A}(t-s)}\mathbf{b}(s) ds &= \int_{t_0}^t e^{\mathbf{A}(t-s)} \left\{ \left[\frac{1}{2} - \frac{s}{4} \right] \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \left[\frac{1}{2} + \frac{s}{4} \right] \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} ds = \\ &= \int_{t_0}^t e^{\mathbf{A}(t-s)} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \left[\frac{1}{2} - \frac{s}{4} \right] + e^{\mathbf{A}(t-s)} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \left[\frac{1}{2} + \frac{s}{4} \right] ds = \\ &= \int_{t_0}^t e^{3(t-s)} \left[\frac{1}{2} - \frac{s}{4} \right] \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + e^{-(t-s)} \left[\frac{1}{2} + \frac{s}{4} \right] \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} ds = \\ &= \left\{ \int_{t_0}^t e^{3(t-s)} \left[\frac{1}{2} - \frac{s}{4} \right] ds \right\} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \left\{ \int_{t_0}^t e^{-(t-s)} \left[\frac{1}{2} + \frac{s}{4} \right] ds \right\} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \\ &= \left\{ \frac{1}{36}(3t-5) - \frac{1}{36}(3t_0-5)e^{3(t-t_0)} \right\} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \left\{ \frac{1}{4}(t+1) - \frac{1}{4}(t_0+1)e^{-(t-t_0)} \right\} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Ezután már csak a kettő összegét kell vennünk.

$$\mathbf{y}(t) = \alpha_1 e^{3(t-t_0)} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \alpha_2 e^{-(t-t_0)} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \left\{ \frac{1}{36}(3t-5) - \frac{1}{36}(3t_0-5)e^{3(t-t_0)} \right\} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \left\{ \frac{1}{4}(t+1) - \frac{1}{4}(t_0+1)e^{-(t-t_0)} \right\} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Ha egy kezdeti feltétel is meg lett volna adva, akkor ezt behelyettesítve a megoldásba, meghatározhatóak az α_1 , α_2 együtthatók is. Legyen pl. a kezdeti feltétel

$$\mathbf{y}(1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

akkor

$$\mathbf{y}(1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

vagyis $\alpha_1 = -\frac{1}{4}$, $\alpha_2 = \frac{1}{4}$, a megoldás pedig

$$\mathbf{y}(t) = -\frac{1}{4}e^{3(t-1)} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \frac{1}{4}e^{-(t-1)} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \left\{ \frac{1}{36}(3t-5) + \frac{1}{18}e^{3(t-1)} \right\} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \left\{ \frac{1}{4}(t+1) - \frac{1}{2}e^{-(t-1)} \right\} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Eddig nem ejtettünk szót a megoldás egyértelműségéről. A konstans variációs formula levezetése mutatja, hogy a megoldás egyértelmű. Ezt alkalmazhatjuk a homogén esetben is. Van egy másik egyszerű mód is, hogy az egyértelműséget igazoljuk: könnyen látható, hogy a jobb oldal folytonos és a második változójában Lipschitzes (az Olvasó gondolja meg, hogy miért!) és így a Picard-Lindelöf tétel szerint a megoldás létezik és egyértelmű.

Ez azt is jelenti, hogy a korábban tárgyalt másod és magasabbrendű differenciálegyenletek megoldásának létezését és egyértelműségét kezelni tudjuk. Például az állandó együtthatós lineáris esetben így már tudjuk, hogy létezik és egyértelmű a megoldás.

Gyakorló feladatok:

Oldjuk meg az alábbi egyenleteket!

1.

$$(a) \quad \begin{cases} \dot{x} = -x \\ \dot{y} = -2y \end{cases} \quad (b) \quad \begin{cases} \dot{x} = 8x + y \\ \dot{y} = -2x + 5y \end{cases} \quad (c) \quad \begin{cases} \dot{x} = 3x + 2y \\ \dot{y} = 2x \\ x(0) = 1 \\ y(0) = -1 \end{cases}$$

2.

$$(a) \quad \begin{cases} \dot{x} = -2x - y \\ \dot{y} = x - 4y \end{cases} \quad (b) \quad \begin{cases} \dot{x} = 2x \\ \dot{y} = x + 2y \end{cases}$$

3.

$$(a) \quad \begin{cases} \dot{x} = -y \\ \dot{y} = x \end{cases} \quad (b) \quad \begin{cases} \dot{x} = x + y \\ \dot{y} = 3y - 2x \end{cases}$$

4.

$$(a) \quad \begin{cases} \dot{x} = x + y \\ \dot{y} = x + y + t \\ x(0) = 0 \\ y(0) = 1 \end{cases} \quad (b) \quad \begin{cases} \dot{x} = x + e^t \\ \dot{y} = x + y \end{cases}$$

5. Tekintsük a lineáris oszcillátorokat, vagyis a 1.2.1, 1.2.7 és a 1.2.8 Példákban tárgyalt másodrendű lineáris differenciálegyenleteket. Írjuk át ezeket elsőrendű redszerré és oldjuk meg őket! A megoldásokat vessük össze a korábbi módon kapott megoldásokkal!

6. Ellenőrizzük le az eredményeinket Matlab használatával!

4.1.2. Állandó együtthatós lineáris rendszerek fázisképe

Ahogy egy dimenzióban láttuk, hogy az egyenletek egy részére nem tudunk zárt alakban megoldást mutatni, így ez természetesen igaz magasabb dimenzióban is, sőt itt ez a probléma még hatványozottabban igaz. Ez azt jelenti, hogy a kvalitatív módszerek még inkább előtérbe kerülnek. Nemlineáris rendszerek esetében a numerikus módszerek mellett gyakorlatilag ez az egyetlen eszköz, ami a rendelkezésünkre áll. De mielőtt rátérünk a nemlineáris rendszerek

kezelésére, megvizsgáljuk ebből az új nézőpontból az állandó együtthatós lineáris rendszereket. A terv az, hogy a lineáris esetben ismerjük a megoldást és ez alapján majd tudunk fázisképet rajzolni, majd ebből levonjuk a következtetéseket, hogy a megoldás felhasználása nélkül is képesek legyünk erre. Ugyanis nemlineáris esetben majd a megoldás nem áll a rendelkezésünkre (a legtöbb esetben), így enélkül kell tudjunk fázisképet rajzolni, majd a fázisképből következtetni a megoldás viselkedésére. Praktikus okokból itt csak két dimenzióra szorítkozunk.

Kétdimenziós állandó együtthatós homogén differenciálegyenletrendszer fázisképe. Először példákon keresztül, aztán szisztematikusan tárgyaljuk kétdimenziós állandó együtthatós homogén differenciálegyenletrendszerek fázisképét.

4.1.8. Példa. Tekintsük az alábbi rendszert.

$$\begin{cases} \dot{y}_1(t) = y_1(t) \\ \dot{y}_2(t) = y_2(t) \end{cases} \quad (4.4)$$

Ez rendkívül egyszerű, a megoldás

$$\mathbf{y}(t) = \begin{pmatrix} c_1 e^t \\ c_2 e^t \end{pmatrix}.$$

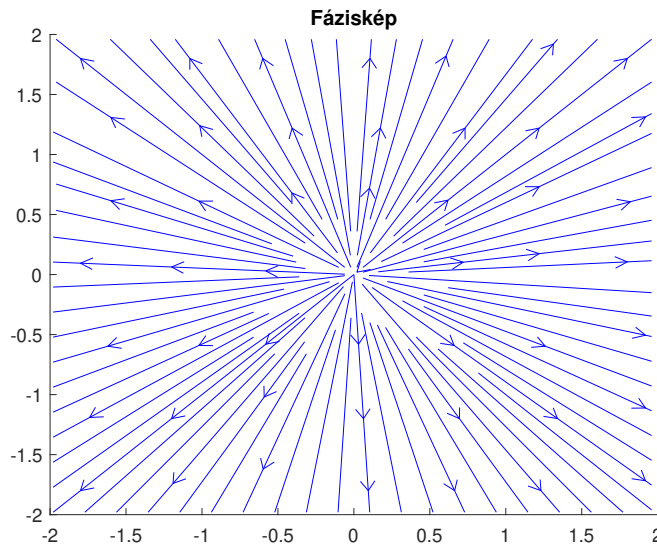
A célunk az, hogy kapcsolatot találjunk y_1 és y_2 közt és t -t kiküszöböljük. Látható, hogy

$$y_2 = C y_1$$

ahol $C \in \mathbb{R}$ tetszőleges. Ez azt jelenti, hogy ha vizualizálni akarjuk a megoldásokat, akkor ezek origón átmenő egyenesek az y_1 - y_2 koordinátarendszerben. Az idő múlását is szokás feltüntetni, ami ebben az esetben azt jelenti, hogy az origótól távolodunk. Ezt könnyen megrajzolhatjuk kézzel is, de a Matlab is képes rá:

```
h=.2;
[y1,y2] = meshgrid(-2:h:2);
dy1 = y1;
dy2 = y2;
streamslice(y1,y2,dy1,dy2);
title('Fáziskép')
```

Tegyük fel egy pillanatra, hogy számunkra csak az ábra adott. Mit tudunk ebből leszűrni a megoldások viselkedésére? A kezdeti feltétel egy (y_{10}, y_{20})



4.1. ábra. A (4.4) rendszer fázisképe.

pontot jelöl ki a síkon. Ez rajta van pontosan egy origón átmenő egyenesen. Ahogy az idő múlik, úgy elindulunk a kezdőpontból és távolodunk az origótól az egyenesen. Kivéve, ha a kezdőpont az origó, hiszen ez stacionárius pont. Ez azt jelenti, hogy pontosan meg tudjuk mondani, hogy mi fog történni. Egyetlen dolog marad rejtve, ez pedig az, hogy milyen gyorsan telik az idő. Gondoljuk meg, hogy pontosan ugyanez a fáziskép tartozik a

$$\begin{cases} \dot{y}_1(t) = 2y_1(t) \\ \dot{y}_2(t) = 2y_2(t) \end{cases}$$

rendszerhez is! De ebben az esetben gyorsabban "siklunk" az adott egyenesen.

Ha a

$$\begin{cases} \dot{y}_1(t) = -y_1(t) \\ \dot{y}_2(t) = -y_2(t) \end{cases}$$

rendszert tekintjük, akkor pedig ellenkező irányban haladunk az adott egyenesen.

4.1.9. Példa. Tekintsük az alábbi rendszert.

$$\begin{cases} \dot{y}_1(t) = y_1(t) \\ \dot{y}_2(t) = -y_2(t) \end{cases} \quad (4.5)$$

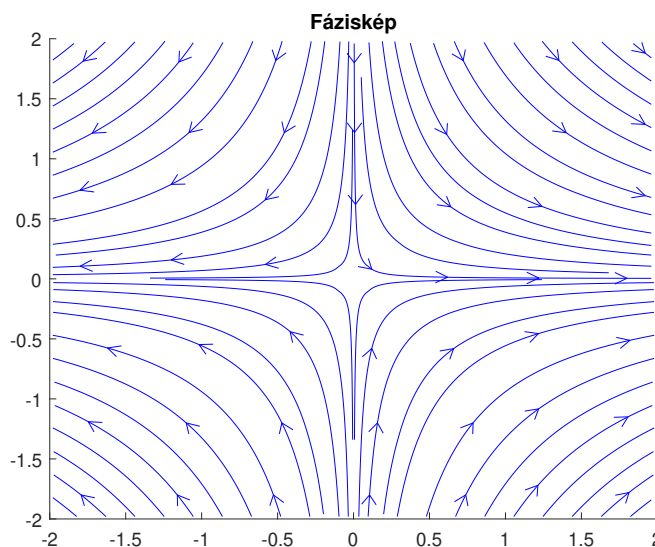
Ez is rendkívül egyszerű, a megoldás

$$\mathbf{y}(t) = \begin{pmatrix} c_1 e^t \\ c_2 e^{-t} \end{pmatrix}.$$

A célunk most is az, hogy kapcsolatot találjunk y_1 és y_2 közt és t -t kiküszöböljük. Látható, hogy

$$y_1 y_2 = C$$

ahol $C \in \mathbb{R}$ tetszőleges. Ezek a görbék hiperbolák az y_1 - y_2 koordinátarendszerben, illetve az $y_1 = 0$ és $y_2 = 0$ egyenesek. Az idő múlását is feltüntetjük: visszatérve a megoldásokhoz látható, hogy az első síknegyedben y_1 értéke növekszik (y_2 -é pedig csökken), ami már kijelöli az idő múlását jelölő nyíl irányát. Ez a többi térsíkra is elvégezhető (beleértve a tengelyeket is). Így kapjuk a következő ábrát. Az Olvasó következtessen az ábrából a rendszer



4.2. ábra. A (4.5) rendszer fázisképe.

viselkedésére: mi történik, ha $t \rightarrow \infty$?

4.1.10. Példa. Tekintsük az alábbi rendszert.

$$\begin{cases} \dot{y}_1(t) = y_1(t) \\ \dot{y}_2(t) = 2y_2(t) \end{cases} \quad (4.6)$$

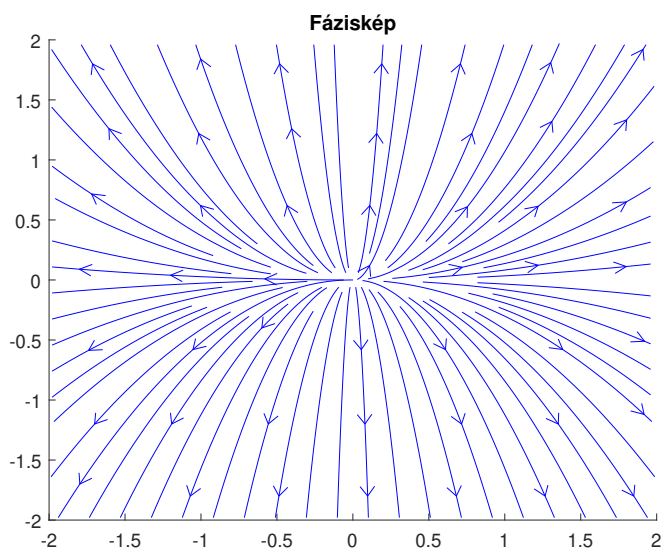
Ez is rendkívül egyszerű, a megoldás

$$\mathbf{y}(t) = \begin{pmatrix} c_1 e^t \\ c_2 e^{2t} \end{pmatrix}.$$

A célunk most is az, hogy kapcsolatot találjunk y_1 és y_2 közt és t -t kiküszöböljük. Látható, hogy

$$y_2 = C y_1^2, \quad \text{vagy} \quad y_1 = 0$$

ahol $C \in \mathbb{R}$ tetszőleges. Ezek a görbék parabolák az y_1 - y_2 koordinátarendszerben, illetve az $y_1 = 0$ és $y_2 = 0$ egyenesek. Látható, hogy távolodunk az origótól (kivéve, ha onnan indulunk).



4.3. ábra. A (4.6) rendszer fázisképe.

4.1.11. Példa. Tekintsük az alábbi rendszert.

$$\begin{cases} \dot{y}_1(t) = y_2(t) \\ \dot{y}_2(t) = -y_1(t) \end{cases} \quad (4.7)$$

Ez a már sokszor előfordult harmonikus oszcillátor egyenlete, ha a tömeg és rugóállandó hányadosát 1-nek vesszük. Vezessünk be polárkoordinátákat:

$y_1(t) = r(t) \cos \varphi(t)$, $y_2(t) = r(t) \sin \varphi(t)$. Ekkor

$$\begin{cases} \dot{r}(t) \cos \varphi(t) - (r(t) \sin \varphi(t)) \dot{\varphi}(t) = r(t) \sin \varphi(t) \\ \dot{r}(t) \sin \varphi(t) + (r(t) \cos \varphi(t)) \dot{\varphi}(t) = -r(t) \cos \varphi(t) \end{cases}$$

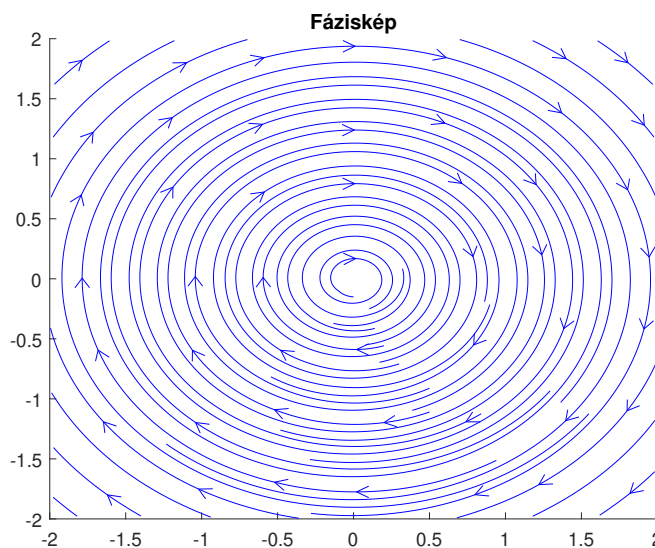
majd az első egyenletet $\cos \varphi(t)$ -vel, a másodikat $\sin \varphi(t)$ -vel szorozva és összeadva:

$$\dot{r}(t) = 0,$$

vagyis r konstans. Továbbá ha az első egyenletet $\sin \varphi(t)$ -vel, a másodikat $\cos \varphi(t)$ -vel szorozva és a másodikból kivonva az első: $r(t) \dot{\varphi}(t) = -r(t)$, vagyis vagy $r(t) = 0$ vagy

$$\dot{\varphi}(t) = -1.$$

Ez pontosan azt jelenti, hogy egy körön mozgunk az óramutató járásával megegyező irányban (és egységnyi sebességgel). Vagyis a fáziskép koncentrikus körökből áll.



4.4. ábra. A (4.7) rendszer fázisképe. Ha figyelmesebben megnézzük, a Matlab által készített ábra egyáltalán nem pontos.

Kezdjük el tematikusan vizsgálni az ilyen rendszereket! A cél, hogy osztályozzuk a lehetséges eseteket, hogy később már csak azt kelljen leellenőrizni,

hogy melyik osztályba tartozik az adott rendszer, ami alapján már tudni fogjuk, hogy nagyjából milyen a fázisképe. Az osztályokat a sajátértékek adják meg és az osztályon belül a sajátvektorok mondják meg pontosabban a fáziskép jellegét.

Induljunk ki egy $\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{A}\mathbf{y}$ 2-dimenziós lineáris rendszerből, ahol $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$. Ha $\mathbf{A}$ diagonalizálható $\mathbf{A} = \mathbf{S}\mathbf{D}\mathbf{S}^{-1}$, $\mathbf{S} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$, akkor $\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{A}\mathbf{y} = \mathbf{S}\mathbf{D}\mathbf{S}^{-1}\mathbf{y}$, majd bevezetve az $\mathbf{x} = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{y}$ új változót a rendszer a következő alakot ölti

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{D}\mathbf{x}.$$

Ha $\mathbf{A}$ nem diagonalizálható, akkor is Jordan normálalakra hozható. Elég ezekre megrajzolnunk a fázisképet, majd visszatranszformálni azt. A következő típusok lefedik az összes lehetőséget.

$$(I) \quad \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} \quad (II) \quad \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \quad (III) \quad \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$$

Először azokban az esetekben rajzoljuk meg a fázisképeket, melyeknél csak az origó az stacionárius pont, azaz a mátrix determinánsa nem 0.

I. A megoldás $x_1(t) = C_1 e^{\lambda t}$, $x_2(t) = C_2 e^{\mu t}$. Ebből a trajektóriák képlete:

$$x_2 = C_2 \left(\frac{x_1}{C_1} \right)^{\mu/\lambda} = C x_1^{\mu/\lambda}$$

A $\lambda \neq 0 \neq \mu$ értékekhez tartozó fázisképeket 3 osztályba soroljuk:

- (1) $\lambda, \mu > 0$. Ebben az esetben az stacionárius pontot *instabil csomó*nak nevezzük. Ez azt jelenti, hogy a trajektóriák az origótól távolodnak és közben nem csavarodhatnak meg körülötte végtelen sokszor. Három aleset van. (a) $0 < \mu < \lambda$; (b) $0 < \lambda < \mu$; (c) $0 < \mu = \lambda$.
- (2) $\lambda, \mu < 0$. *Stabil csomó*. Ez azt jelenti, hogy a trajektóriák az origóhoz közelednek és közben nem csavarodhatnak meg körülötte végtelen sokszor. Három aleset van. (a) $\mu < \lambda < 0$; (b) $\lambda < \mu < 0$; (c) $\mu = \lambda < 0$.
- (3) $\lambda\mu < 0$. *Nyereg*. Az elnevezés onnan jön, hogy pontosan ilyen trajektóriát rajzolna le egy biliárdgolyó, ha egy nyereg felületére helyeznénk és fentről néznénk. Két aleset van.

II. A megoldás $x_1(t) = (C_1 + C_2 t)e^{\lambda t}$, $x_2(t) = C_2 e^{\lambda t}$. Ebből a trajektóriák képlete:

$$x_1 = x_2 \left(\frac{C_1}{C_2} + \frac{1}{\lambda} \ln \frac{x_2}{C_2} \right)$$

A $\lambda \neq 0$ értékekhez tartozó fázisképeket 2 osztályba soroljuk:

- (1) $\lambda > 0$. *Instabil elfajult csomó.*
- (2) $\lambda < 0$. *Stabil elfajult csomó.*

III. Vezessünk be polárkoordinátákat: $x_1 = r \cos \varphi$, $x_2 = r \sin \varphi$. Az új változókra az

$$\begin{cases} \dot{r} = \alpha r \\ \dot{\varphi} = \beta \end{cases}$$

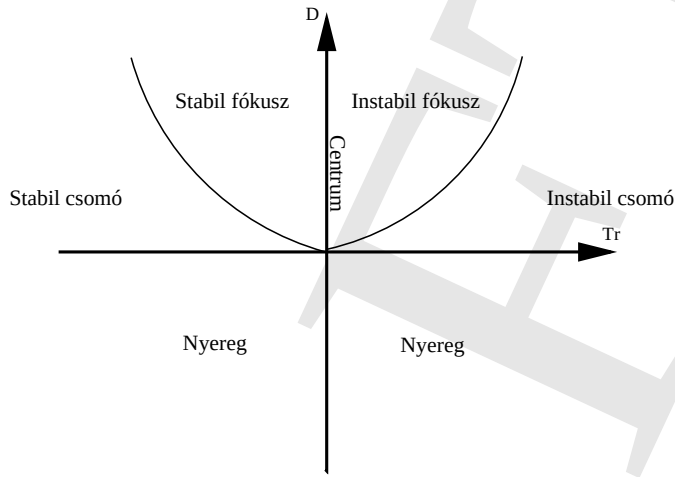
differenciálegyenletrendszert kapjuk (az Olvasó járjon utána miért, ehhez támpontot nyújt a 4.1.11. Példa). Ezek alapján a $\beta \neq 0$ értékekhez tartozó fázisképeket 3 osztályba soroljuk:

- (1) $\alpha > 0$. *Instabil fókusz.* Ez azt jelenti, hogy a trajektóriák távolodnak az origótól és végtelen sokszor csavarodnak meg körülötte.
- (2) $\alpha < 0$. *Stabil fókusz.* Ez azt jelenti, hogy a trajektóriák közelednek az origóhoz és végtelen sokszor csavarodnak meg körülötte.
- (3) $\alpha = 0$. *Centrum.* A trajektóriák zárt görbéket rajzolnak ki az origó körül.

Négy olyan elfajult fáziskép van, melyeknél nem csak az origó az stacionárius pont (azaz a mátrix determinánsa 0): az I. esetben $\lambda = 0$ és $\mu > 0$; az I. esetben $\lambda = 0$ és $\mu < 0$; az I. esetben $\lambda = 0$ és $\mu = 0$; a II. esetben $\lambda = 0$. Az Olvasó gondolja végig ezeket az eseteket!

Az általános esetben ezeket kell visszatranszformálni. Könnyen igazolható, hogy ennek során az I. és II. esetben a csomók, illetve a nyereg tengelyei elfordulnak, és éppen az A mátrix sajátirányjaival fognak egybeesni. Komplex sajátértékek esetében pedig "lényegében" nem jelent változást a visszatranszformálás.

Érdemes észrevenni, hogy a fáziskép típusa a sajátértékek kiszámítása nélkül, a mátrix determinánsa (D) és nyoma (Tr) segítségével meghatározható, az alábbi ábra szerint. (A parabola egyenlete $Tr^2 = 4D$.)



4.1.12. Példa. Tekintsük az alábbi rendszert.

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = 3y_1 + 2y_2 \\ \dot{y}_2 = 2y_1 \end{cases} \quad (4.8)$$

A sajátérték-sajátvektor párok:

$$\lambda_1 = 4, \quad \mathbf{s}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \lambda_2 = -1, \quad \mathbf{s}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

A stacionárius pont típusa nyereg, az $\mathbf{s}_1$ irányú trajektórián az origótól távolodunk, míg az $\mathbf{s}_2$ irányú trajektórián az origóhoz közeledünk. A többi trajektória hiperbola melyeken az irányt az $\mathbf{s}_1$ - $\mathbf{s}_2$ irányok jelölik ki.

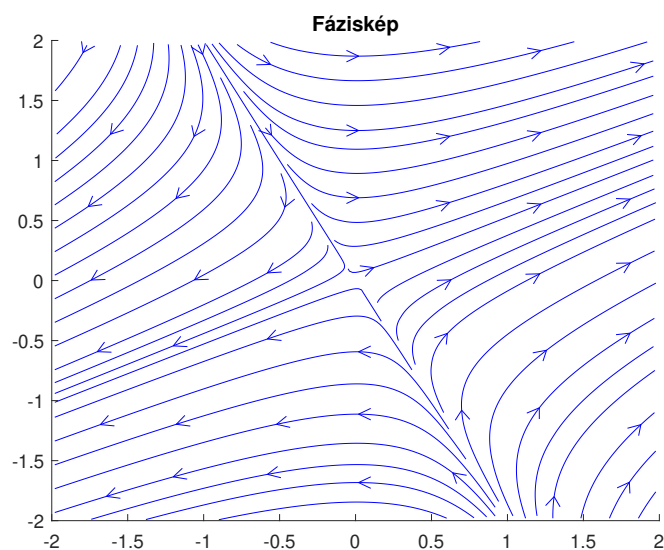
4.1.13. Példa. Tekintsük az alábbi rendszert.

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = 8y_1 + y_2 \\ \dot{y}_2 = -2y_1 + 5y_2 \end{cases} \quad (4.9)$$

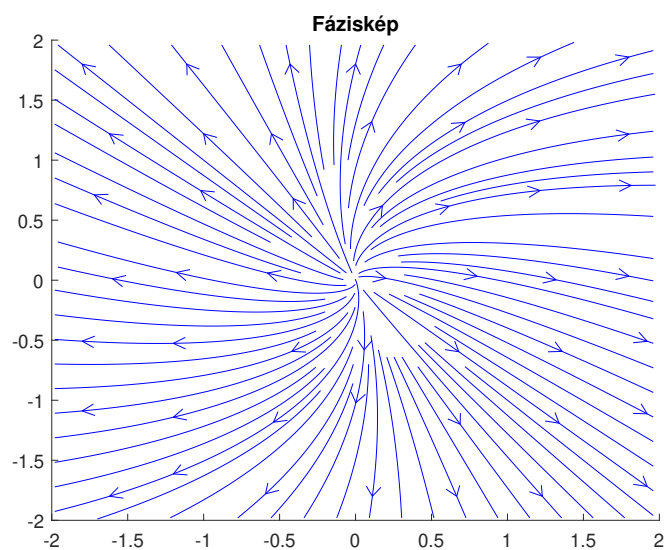
A sajátérték-sajátvektor párok:

$$\lambda_1 = 7, \quad \mathbf{s}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \lambda_2 = 6, \quad \mathbf{s}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

A stacionárius pont típusa instabil csomó. Az $\mathbf{s}_1$ irányú trajektórián gyorsabban távolodunk az origótól, mint az $\mathbf{s}_2$ irányú trajektórián.



4.5. ábra. A (4.8) rendszer fázisképe.



4.6. ábra. A (4.9) rendszer fázisképe.

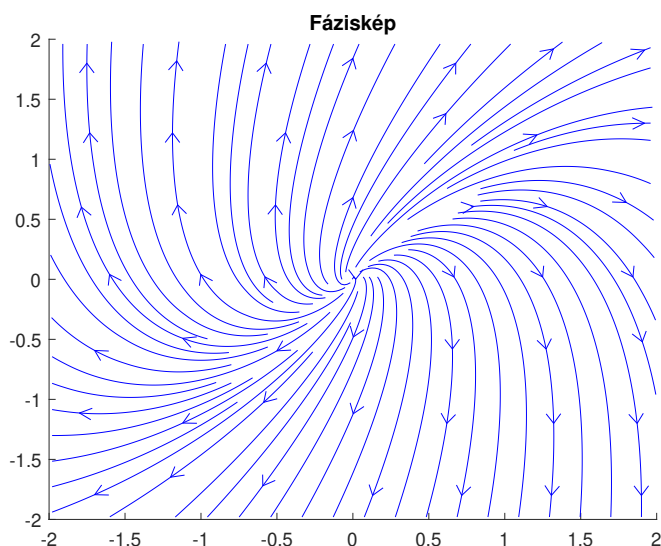
4.1.14. Példa. Tekintsük az alábbi rendszert.

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = y_1 + y_2 \\ \dot{y} = 3y_2 - 2y_1 \end{cases} \quad (4.10)$$

A sajátértékek:

$$\lambda_1 = 2 + i, \quad \lambda_2 = 2 - i.$$

A stacionárius pont típusa instabil fókusz (a valós rész pozitív, ezért instabil, illetve a sajátértékek komplexek, ezért fókusz). A sajátértékeket nem szükséges meghatározni. Az y_2 -tengelyt a pozitív részén balról jobbra metsszük át. Ezt leellenőrizhetjük pl. ha az első egyenletbe behelyettesítjük a $(0, 1)$ pontot: ebben a pontban $\dot{y}_1 = 1$, vagyis pozitív, így y_1 -irányban növekszik.



4.7. ábra. A (4.10) rendszer fázisképe.

4.1.15. Példa. Tekintsük az alábbi rendszereket.

$$\begin{cases} \dot{x} = -2x - y \\ \dot{y} = x - 4y \end{cases} \quad (4.11)$$

$$\begin{cases} \dot{x} = -4x + y \\ \dot{y} = -x - 2y \end{cases} \quad (4.12)$$

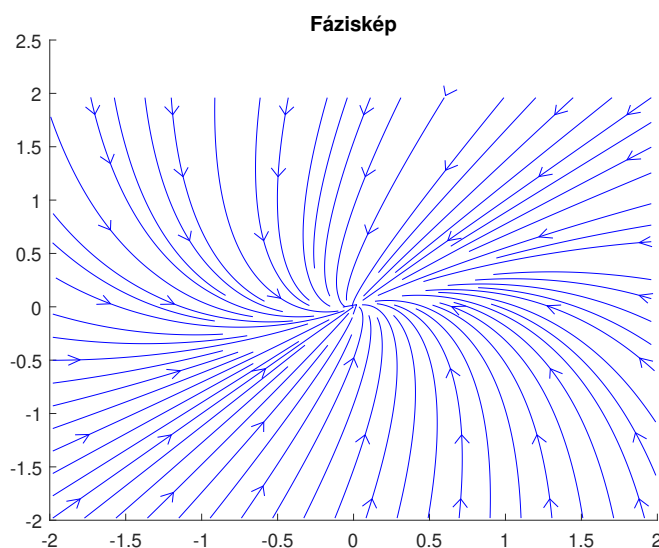
$$\begin{cases} \dot{x} = -2x + y \\ \dot{y} = -x - 4y \end{cases} \quad (4.13)$$

$$\begin{cases} \dot{x} = -4x - y \\ \dot{y} = x - 2y \end{cases} \quad (4.14)$$

Mindegyik esetben az egyetlen sajátérték a $\lambda = -3$, míg az egyetlen sajátérték, sorrendben:

$$\mathbf{s} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{s} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{s} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{s} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad .$$

A stacionárius pont típusa degenerált stabil csomó. Az $\mathbf{s}$ irányú trajektórián közeledünk az origóhoz, a négy eset tanulmányozásával az Olvasó kitapasztalhatja, a lehetséges eseteket.



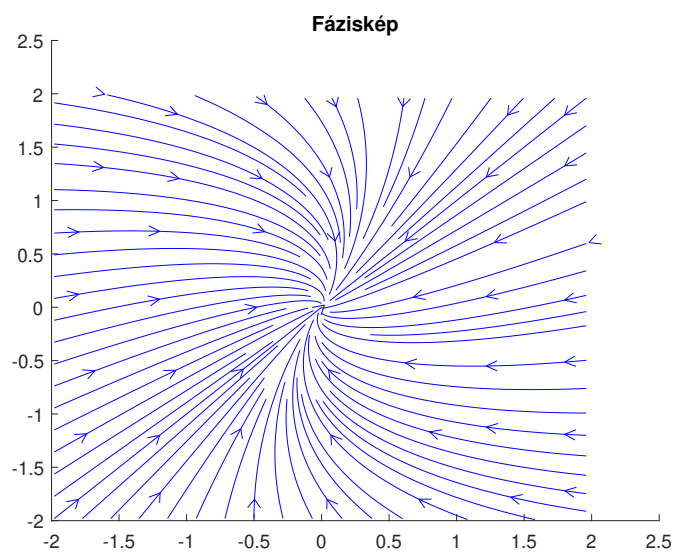
4.8. ábra. A (4.11) rendszer fázisképe.

Gyakorló feladatok:

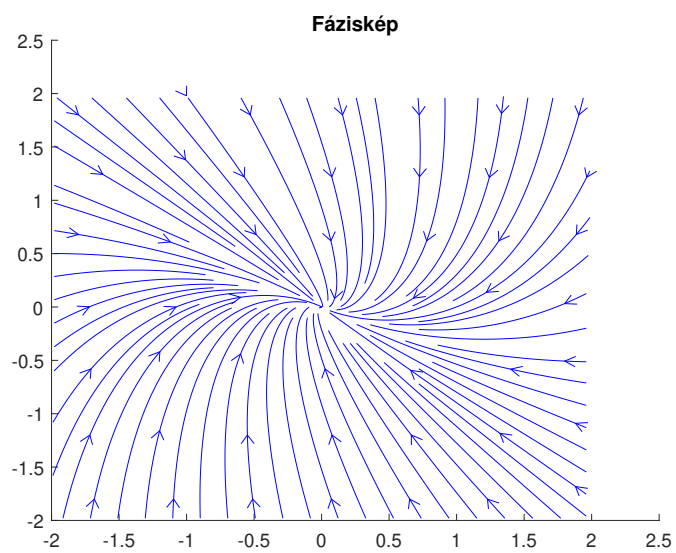
1. Rajzoljuk meg az alábbi rendszerek fázisképét és állapítsuk meg a típusukat!

(a)

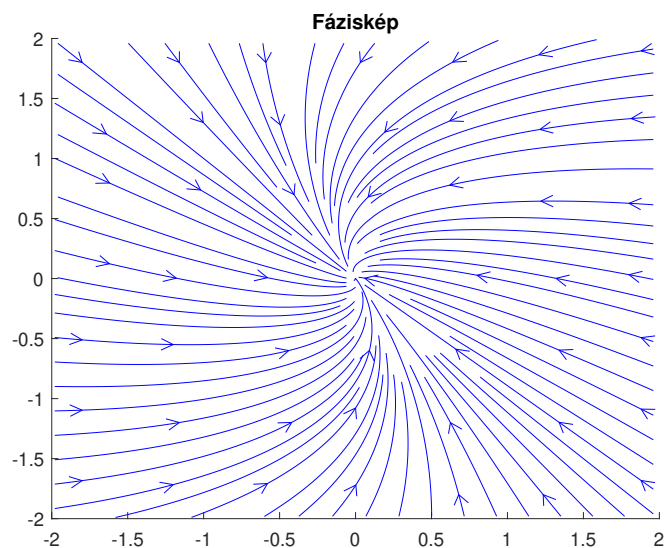
$$\begin{cases} \dot{x} = -x \\ \dot{y} = x - 2y \end{cases}$$



4.9. ábra. A (4.12) rendszer fázisképe.



4.10. ábra. A (4.13) rendszer fázisképe.



4.11. ábra. A (4.14) rendszer fázisképe.

(b)

$$\begin{cases} \dot{x} = x - y \\ \dot{y} = -4x + y \end{cases}$$

(c)

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x + y \\ \dot{y} = -x + 4y \end{cases}$$

(d)

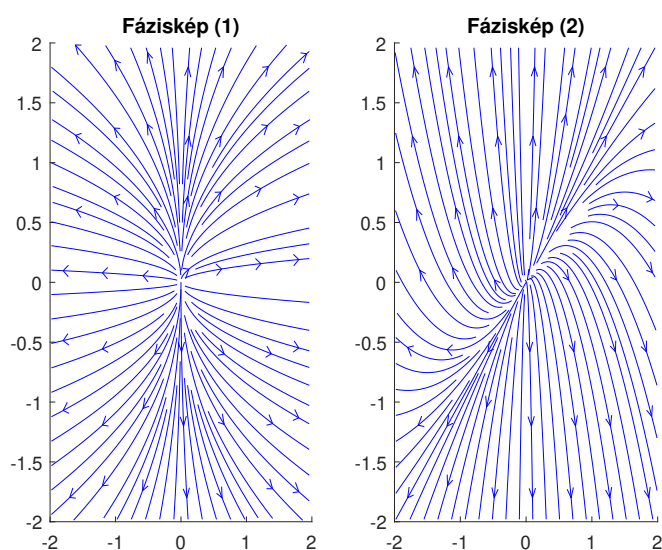
$$\begin{cases} \dot{x} = 2x \\ \dot{y} = x + 2y \end{cases}$$

(e)

$$\begin{cases} \dot{x} = -x + 2y \\ \dot{y} = -2x - y \end{cases}$$

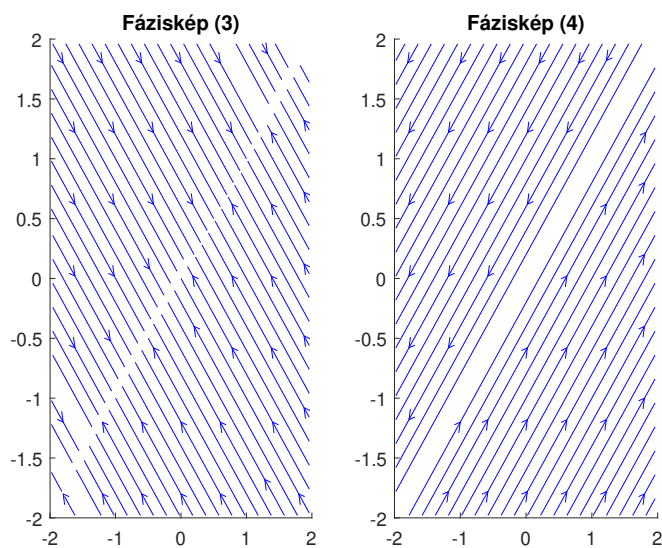
(f) Használjunk ehhez Matlabot!

2. Rekonstruáljuk a fázisképükből a lineáris rendszereket!

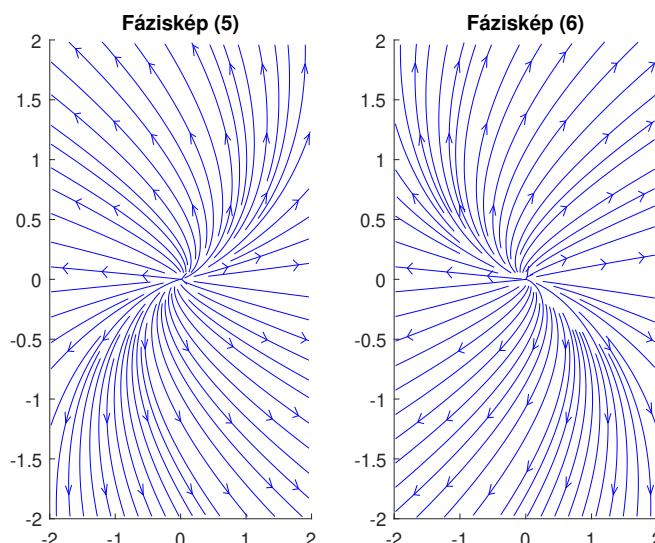


(a) Az (1)-es rendszert és a (2)-es rendszert.

(b) A (3)-es rendszert és a (4)-es rendszert.



(c) Az (5)-ös rendszert és a (6)-os rendszert.



4.2. Nemlineáris autonóm rendszerek

Itt már elvétve akad olyan eset, ahol a megoldást használható alakban meg tudnánk adni. Vagyis kvalitatív módszerek kerülnek előtérbe.

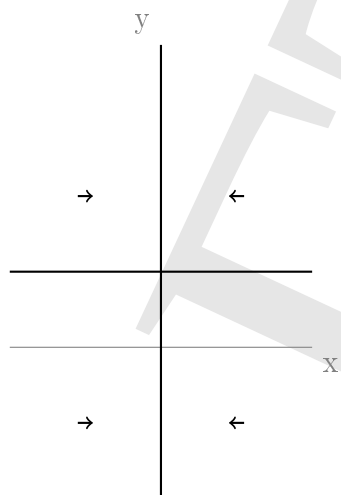
4.2.1. Nemlineáris autonóm rendszerek fázisképe

Egyszerűség kedvéért x és y fogja jelölni a két ismeretlen függvényt, így nem kell indexeket használnunk. Példákon keresztül mutatjuk be, hogy hogyan érdemes megrajzolni nemlineáris autonóm rendszerek fázisképét.

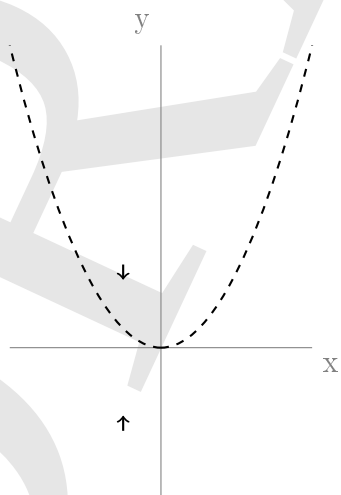
4.2.1. Példa. Tekintsük az alábbi rendszert!

$$\begin{cases} \dot{x} = x - xy \\ \dot{y} = x^2 - y \end{cases} \quad (4.15)$$

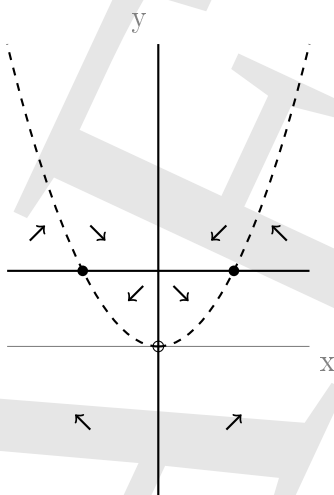
- Vizsgáljuk meg az $f_1(x, y) = x - xy$ előjelét! Ebből arra tudunk majd következtetni, hogy a trajektóriák hol haladnak balra, illetve jobbra (hiszen $\dot{x} = f_1$). Ezt ábrázolni fogjuk. A legegyszerűbb úgy eljárni, hogy megkeressük, hogy hol teljesül $f_1(x, y) = 0$, ezek a görbék tartományokra osztják a síkot és ezen tartományokban azonos f_1 előjele, hiszen folytonos. Tehát, tartományonként elég leellenőrizni egy pontra az előjelet, ami az egész tartományra érvényes lesz. A következő sematikus 4.2.1.Ábrát készíthetjük.

4.12. ábra. Az f_1 előjele által meghatározott irányok.

- Vizsgáljuk meg az $f_2(x, y) = x^2 - y$ előjelét! Ebből arra tudunk majd következtetni, hogy a trajektóriák hol haladnak le, illetve fel. A következő sematikus 4.2.1.Ábrát készíthetjük.

4.13. ábra. Az f_2 előjele által meghatározott irányok.

- Ezek után már csak a két ábrát kell "egybeolvasztani", lásd 4.2.1.Ábra.

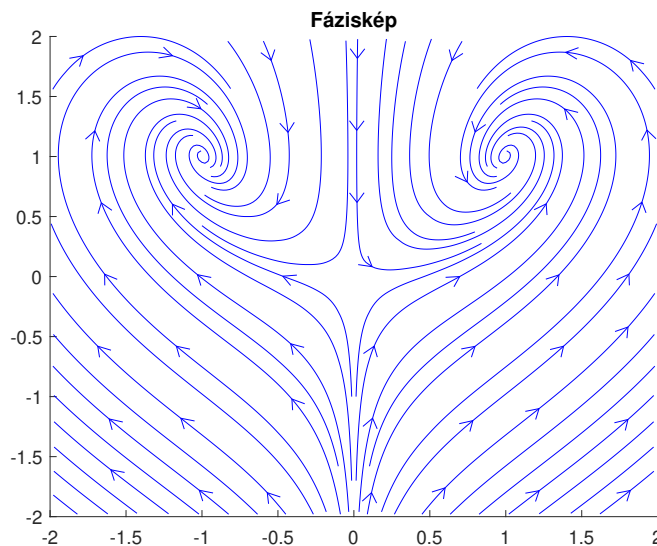


4.14. ábra. Az egyesített ábra.

A trajektóriák a nyilakat követik. Vegyük észre, hogy a vastag, illetve a szaggatott vonalak metszéspontjai az stacionárius pontok, hiszen ezekben a pontokban f_1 és f_2 is nulla, tehát se vízszintesen, se függőlegesen nincs elmozdulás, vagyis $(0,0)$, $(-1,1)$, $(1,1)$. Mellékeljük a Matlab által készített fázisképet.

```
h=.2;
[x,y] = meshgrid(-2:h:2);
dx = x-x.*y;
dy = x.^2-y;
streamslice(x,y,dx,dy);
title('Fáziskép')
```

A lineáris rendszerek esetében voltak elnevezéseink az egyes stacionárius pontok típusára. Ezeket az elnevezéseket fogjuk használni nemlineáris esetben is. Például, látható, hogy az origó itt nyeregként viselkedik, míg a $(-1,1)$, $(1,1)$ esetében azt látjuk, hogy a trajektóriák körbejárják őket, tehát fókuszként viselkednek, de az ennyiből még nem derül ki, hogy stabil, vagy instabil



4.15. ábra. A (4.15) rendszer fázisképe.

fókuszként. A Matlab ábrája mindenesetre azt sugallja, hogy stabil fókusz mindkettő, de erre nem hagyatkozhatunk, mint bizonyíték, csak mint sejtés.

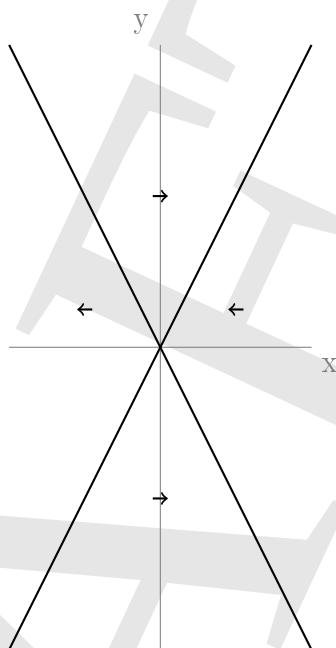
4.2.2. Példa. Tekintsük az alábbi rendszert!

$$\begin{cases} \dot{x} = y^2 - 4x^2 \\ \dot{y} = 8 - 4y \end{cases} \quad (4.16)$$

- Az $f_1(x, y) = y^2 - 4x^2$ előjele alapján a 4.2.2.Ábrát készíthetjük.
- Az $f_2(x, y) = 8 - 4y$ előjele alapján a 4.2.2.Ábrát készíthetjük.
- Ezek után már csak a két ábrát kell "egybeolvasztani", lásd 4.2.2.Ábra. Látható, hogy a $(-1, 2)$ nyereg, míg a $(1, 2)$ stabil csomó.

Mellékeljük a Matlab által készített fázisképet.

```
h=.2;
[x,y] = meshgrid(-4:h:4);
dx = y.^2-4*x.^2;
dy = 8-4*y;
streamslice(x,y,dx,dy);
title('Fáziskép')
```



4.16. ábra. Az f_1 előjele által meghatározott irányok.

Gyakorló feladatok:

1. Rajzoljuk meg kézzel és Matlabbal is az alábbi rendszerek fázisképét! Keressük meg a stacionárius pontokat! Amennyiben a rajz alapján lehet, állapítsuk meg a stacionárius pontok típusát.

(a)

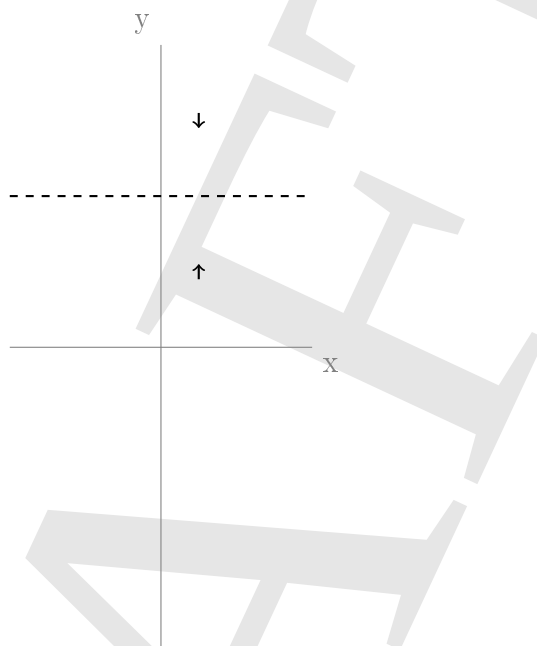
$$\begin{cases} \dot{x} = x(y - 1) \\ \dot{y} = y(x - 1) \end{cases}$$

(b)

$$\begin{cases} \dot{x} = x + y^2 \\ \dot{y} = x + y \end{cases}$$

(c)

$$\begin{cases} \dot{x} = x - x^2 - xy \\ \dot{y} = 3y - xy - 2y^2 \end{cases}$$



4.17. ábra. Az f_2 előjele által meghatározott irányok.

2. A fázisképeükből, lásd 2.Ábra, rekonstruáljuk a rendszereket!

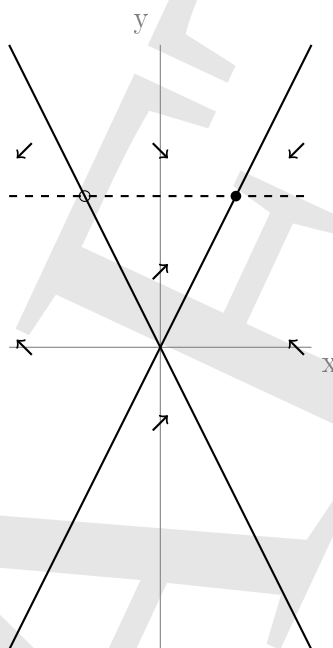
4.2.2. Stacionárius pontok és stabilitásuk

Eddig is beszéltünk stacionárius pontokról, illetve a stabilitásukról, de ezt heurisztikusan, nem definíciókra támaszkodva tettük. Egyrészt indokolt ezeknek a fogalmaknak a további vizsgálata, hiszen a (4.15) rendszer esetében a fáziskép nem szolgáltat elegendő információt bizonyos stacionárius pontok stabilitásáról. Ahhoz, hogy ezen fogalmakat közelebbről megvizsgáljuk elengedhetetlen, hogy pontosan definiáljuk őket.

Tekintsük az

$$\dot{\mathbf{y}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{y}(t)) \quad (4.17)$$

autonóm differenciálegyenlet rendszert, ahol $M \subset \mathbb{R}^d$ tartomány, $\mathbf{f} : M \rightarrow \mathbb{R}^d$ Lipschitzes (amivel biztosítottuk az egyértelmű megoldás létezését minden



4.18. ábra. Az egyesített ábra.

értelmes kezdetiértékre). Jelöljük $\varphi(\cdot, \mathbf{p})$ -vel a rendszer $\mathbf{p}$ -ből induló megoldásának trajektóriáját.

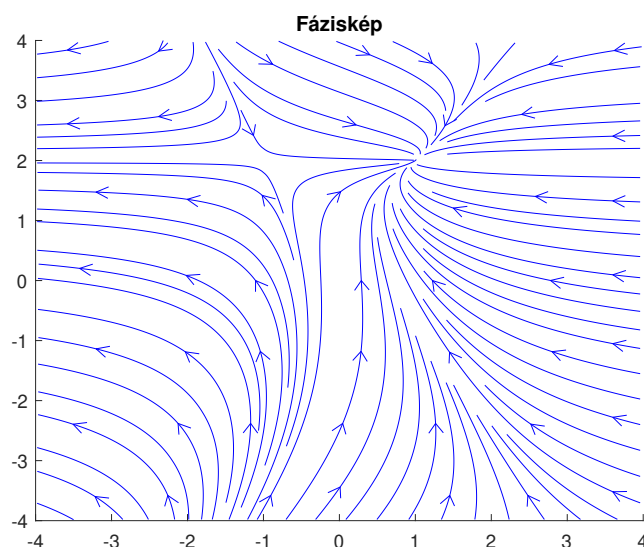
4.2.3. Definíció. Amh. a $\mathbf{p}$ pont az (4.17) rendszer stacionárius pontja, ha $\varphi(t, \mathbf{p}) = \mathbf{p}, \forall t \in \mathbb{R}^+$.

A stacionárius pontok meghatározására van egy egyszerű recept, ami a következő (triviális) lemmán alapul.

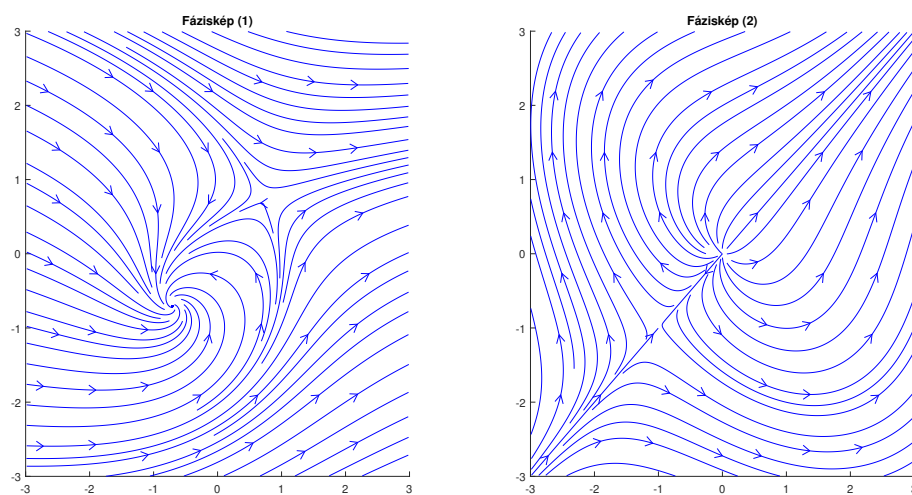
4.2.4. Lemma. *A stacionárius pontokat az $\mathbf{f}(\mathbf{p}) = \mathbf{0}$ egyenletrendszer megoldásai adják.*

Receptünk tehát van a stacionárius pontok meghatározására, de ez nem jelenti azt, hogy ez mindig realizálható! Ugyanis ehhez egy nemlineáris egyenletrendszer megoldásait kellene megtalálnunk, ami sokszor lehetetlen. Ilyenkor ezeket közelíthetjük (pl. Newton-iterációval).

A következőkben definiáljuk stacionárius pontok stabilitását. Három kategóriát különböztetünk meg, stabil, aszimptotikusan stabil és instabil



4.19. ábra. A (4.16) rendszer fázisképe.



4.20. ábra. A fázisképükből rekonstruáljuk a rendszereket!

stacionárius pontokat. Heurisztikusan ezeket a kategóriákat úgy képzelhetjük el, mint különböző felületekre lehelyezett biliárdgolyókat. Ha stacionárius

pontba helyeztük, akkor onnan nem fog elmozdulni. A kérdés az, hogy ha innen egy kicsit kitérítjük, akkor mi fog történni? Az instabil stacionárius pontot úgy képzelhetjük el, mint egy dombtetőt. Ha pontosan ott van a biliárdgolyó, akkor ottmarad, de ha picit is kimozdítjuk onnan, akkor elgurul. Az aszimptotikusan stabil stacionárius pontot úgy, mint egy völgy legmélyebb pontját, amennyiben feltesszük, hogy van közegellenállás. Ha innen kitérítjük a biliárdgolyót, akkor nem fog elszökni, sőt visszatér a legmélyebb pontra. Míg a stabil stacionárius pontot úgy, mint akár egy vízszintes felületet, ha kimozdítjuk innen, akkor nem fog elszökni (de ebben az esetben nem várjuk el, hogy vissza is térjen oda, ahonnan kimozdítottuk). De úgy is elképzelhetjük, mint egy völgy legmélyebb pontját, de most feltesszük, hogy nincs közegellenállás és súrlódás sem, így a biliárdgolyó megőrzi az energiáját. Ha kimozdítottuk a stacionárius pontból, akkor magasabb energiaszintre hoztuk, és az energiamegmaradás miatt habár ideglenesen visszatérhet helyileg a völgy aljára, de nem lesz nulla a sebessége. Másrészt elszökni viszont nem fog tudni. Ebből le is vonhatunk egy tanulságot: nem a hely felel meg ebben az analógiában a stacionárius pont pozíciójának, hanem egy hely-sebesség pár!

Most ezeket a "naiv" elképzeléseket formába öntjük a következő definíció segítségével.

4.2.5. Definíció. Amh. az (4.17) rendszer $\mathbf{p}$ stacionárius pontja

- *stabil*, ha $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, hogy ha $\mathbf{q} \in M, \|\mathbf{q} - \mathbf{p}\| < \delta$, akkor $\|\varphi(t, \mathbf{q}) - \mathbf{p}\| < \varepsilon$;
- *aszimptotikusan stabil*, ha $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, hogy ha $\mathbf{q} \in M, \|\mathbf{q} - \mathbf{p}\| < \delta$, akkor $\|\varphi(t, \mathbf{q}) - \mathbf{p}\| < \varepsilon$ és $\lim_{t \rightarrow \infty} \|\varphi(t, \mathbf{q}) - \mathbf{p}\| = 0$;
- *instabil*, ha nem stabil.

Mit jelentenek ezek a definíciók a legegyszerűbb esetben? Ezt fedi le a következő tétel.

4.2.6. Tétel. (Állandó együtthatós lineáris rendszerek stabilitása) Tekintsük az $\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{A}\mathbf{y}$ lineáris rendszert, ahol $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{d \times d}$. Ennek a $\mathbf{0}$ stacionárius pontja. Ez a stacionárius pont

1. *instabil*, ha $\exists \lambda$ sajátértéke $\mathbf{A}$ -nak, melyre $\operatorname{Re} \lambda > 0$;

2. *aszimptotikusan stabil, ha $\mathbf{A}$ -nak $\forall \lambda_i$ sajátértékére fennáll, hogy $\operatorname{Re} \lambda_i < 0$.*
3. *Ha $\mathbf{A}$ -nak $\forall \lambda_i$ sajátértékére fennáll, hogy $\operatorname{Re} \lambda_i \leq 0$ és*
 - (a) *minden olyan sajátértékre melyre $\operatorname{Re} \lambda_i = 0$ teljesül, akkor pontosan annyi lineárisan független sajátvektor tartozik ehhez a sajátértékhez, mint amennyi a multiplicitása, akkor az origó stabil;*
 - (b) *$\exists \lambda_i : \operatorname{Re} \lambda_i = 0$, és kevesebb lineárisan független sajátvektor tartozik ehhez a sajátértékhez, mint amennyi a multiplicitása, akkor az origó instabil.*

Bizonyítás. Megoldásból következik. □

Ez azt jelenti, hogy lineáris állandó együtthatós homogén esetben a stacionárius pont stabilitása a sajátértékektől és a sajátvektorrendszertől függ. Ez azért fontos, mert a nemlineáris autonóm rendszerek egy stacionárius pont környezetében lokálisan majdnem mindig úgy viselkednek, mint egy lineáris állandó együtthatós homogén rendszer az origó környezetében.

Stacionárius pontok stabilitásvizsgálata linearizálással. Tekintsünk egy autonóm nemlineáris rendszert (4.17), melynek stacionárius pontja $\mathbf{p}$. Legyen $\mathbf{x}(t) = \mathbf{y}(t) - \mathbf{p}$ és alkalmazzunk Taylor-sorfejtést (feltételezve, hogy $\mathbf{f}$ elég sima)!

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \dot{\mathbf{y}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t) + \mathbf{p}) = \mathbf{f}(\mathbf{p}) + \mathbf{f}'(\mathbf{p})\mathbf{x}(t) + \mathbf{r}(\mathbf{x}(t)),$$

ahol $\mathbf{f}(\mathbf{p}) = \mathbf{0}$, illetve $\mathbf{r}$ tartalmazza a magasabbrendű tagokat, vagyis $\frac{\|\mathbf{r}(\mathbf{x}(t))\|}{\|\mathbf{x}(t)\|} \rightarrow 0$, ha $\mathbf{x}(t) \rightarrow \mathbf{0}$. Ezt elhagyva kapjuk a linearizált rendszert:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}'(\mathbf{p})\mathbf{x}(t). \quad (4.18)$$

Ha $\mathbf{y}(t)$ közel van $\mathbf{p}$ -hez akkor $\mathbf{x}(t)$ közel van a $\mathbf{0}$ -hoz és reményeink szerint a linearizált rendszer megoldása hasonlóképp viselkedik, mint az eredeti rendszer megoldása, vagyis a linearizált rendszer $\mathbf{0}$ stacionárius pontjának stabilitástípusából következtethetünk az eredeti rendszer $\mathbf{p}$ stacionárius pontjának stabilitástípusára. Ezt azért remélhetjük, mert $\mathbf{r}(\mathbf{x}(t))$ "kisebb", mint $\mathbf{x}(t)$, tehát a rendszer viselkedését $\mathbf{p}$ környezetében $\mathbf{f}'(\mathbf{p})\mathbf{x}(t)$ fogja meghatározni és $\mathbf{r}(\mathbf{x}(t))$ hatása elhanyagolható, kivéve bizonyos eseteket.

4.2.7. Tétel. Tekintsünk a (4.17) autonóm nemlineáris rendszert, melynek stacionárius pontja $\mathbf{p}$ és tekintsük a hozzá tartozó (4.18) linearizált rendszert. Tegyük fel, hogy a jobb oldal kellően sima. Ha az $\mathbf{f}'(\mathbf{p})$ mátrixnak

- van olyan λ sajátértéke, melyre $\operatorname{Re} \lambda > 0$, akkor a $\mathbf{p}$ stacionárius pont instabil;
- minden λ_i sajátértéke olyan, hogy $\operatorname{Re} \lambda_i < 0$, akkor a $\mathbf{p}$ stacionárius pont aszimptotikusan stabil.

Bizonyítás. Itt csak skalár esetben bizonyítjuk és csak az állítás felét. A magasabb dimenziós eset felének bizonyítását csak felvázoljuk.

Taylor sorfejtést alkalmazunk.

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= \dot{y}(t) = f(y(t)) = f(p + x(t)) = \\ &= f(p) + f'(p)x(t) + \frac{f''(\xi(t))}{2}x^2(t) = f'(p)x(t) + r(x(t)),\end{aligned}$$

ahol

$$r(x(t)) = \frac{f''(\xi(t))}{2}x^2(t), \xi(t) \in B_{x(t)}(p)$$

Tfh. $f'(p) = A < 0$, ekkor $\forall \varepsilon > 0$ kell mutassunk egy $\delta > 0$ -t, hogy $|x(0)| < \delta$ esetén

- egyrészt $|x(t)| < \varepsilon$,
- másrészt $|x(t)| \rightarrow 0$.

Ha $f \in C^2 \bar{B}_\varepsilon(p)$ és $|x(t)| < \varepsilon$, akkor $\exists M > 0$, hogy

$$|f''(\xi(t))| \leq M.$$

Legyen $\delta := \min \left\{ \varepsilon, -\frac{A}{M} \right\}$. Ha $|x(t)| < \delta$, akkor

$$|r(x(t))| \leq -\frac{A}{2}|x(t)|.$$

Alkalmazzuk a beszorzós trükköt:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + r(x(t)) \\ x(t)e^{-At} &= x(0) + \int_0^t e^{-As} r(x(s)) \, ds \\ |x(t)|e^{-At} &\leq |x(0)| + \int_0^t e^{-As} |r(x(s))| \, ds \leq |x(0)| + \int_0^t e^{-As} \frac{-A}{2} |x(s)| \, ds\end{aligned}$$

Legyen $u(t) = |x(t)|e^{-At}$, $u(0) = |x(0)|$, ekkor:

$$u(t) \leq u(0) + \frac{-A}{2} \int_0^t u(s) \, ds.$$

Alkalmazzuk a 2.2.2. Gronwall-lemmát:

$$u(t) \leq u(0)e^{\frac{-A}{2}t},$$

vagyis

$$|x(t)| \leq |x(0)|e^{\frac{A}{2}t},$$

ahol a jobb oldal monoton módon tart 0-hoz, ami bizonyítja az állítást.

Magasabb dimenzióban is ezt az utat érdemes követni. Könnyen el lehet jutni a következő egyenlőtlenségig:

$$\|\mathbf{x}(t)\| \leq \|e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}(0)\| + \int_0^t \|e^{\mathbf{A}(t-s)}\mathbf{r}(\mathbf{x}(s))\| \, ds,$$

majd be lehet látni a következő állítást (ezek bizonyítását nem mellékeljük):

- $\exists K, \alpha > 0 : \|e^{\mathbf{A}t}\mathbf{q}\| \leq Ke^{-\alpha t}\|\mathbf{q}\|$ teljesül $\forall \mathbf{q}$ esetén;
- $\exists \delta > 0 : \|\mathbf{r}(\mathbf{q})\| \leq \frac{\alpha}{2K}\|\mathbf{q}\|$ teljesül $\|\mathbf{q}\| \leq \delta \leq \varepsilon$ esetén.

Ezután a befejezés ugyanúgy megy, mint a skalár esetben. □

4.2.8. Példa. Tekintsük a (4.15) rendszert. Itt korábban nem tudtuk eldönteni a $(-1, 1)$ és az $(1, 1)$ stacionárius pontok stabilitását. Alkalmazzunk linearizálást!

$$\mathbf{f}'(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - y & -x \\ 2x & -1 \end{pmatrix},$$

vagyis

$$\mathbf{f}'(-1, 1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}'(1, 1) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

A sajátértékek mindkét esetben $\lambda_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{7}}{2}i$, vagyis $\operatorname{Re} \lambda < 0$ minden sajátértékre, így mindkét stacionárius pont aszimptotikusan stabil.

4.2.9. Megjegyzés. Fontos, hogy észrevegyük, hogy a tétel abban az esetben, amikor a linearizált rendszer minden sajátértékének valós része nempozitív, arról nem állít semmit. Ez nem véletlen. Tekintsük az alábbi példákat!

$$(A) \quad \dot{y}(t) = y^3(t) \quad (B) \quad \dot{y}(t) = -y^3(t).$$

Mindkét rendszernek (igaz csak egydimenziós) stacionárius pontja a 0 pont, de míg az (A) esetben instabil, addig a (B) esetben aszimptotikusan stabil. Ugyanakkor mindkét rendszer esetében a hozzá tartozó linearizált rendszer

$$\dot{x}(t) = 0,$$

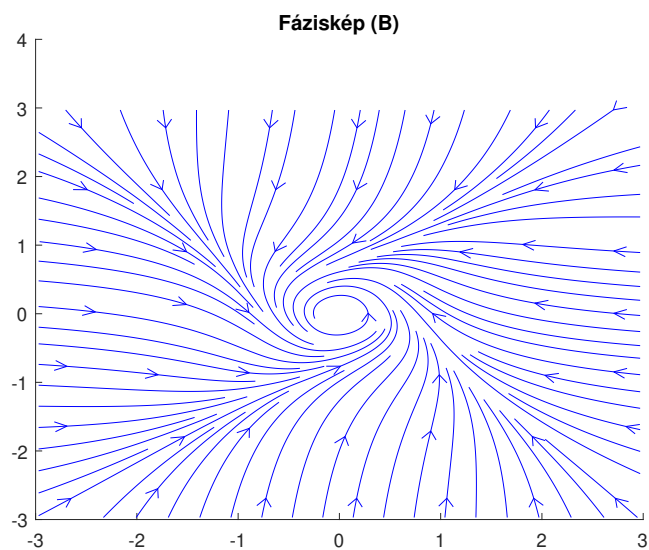
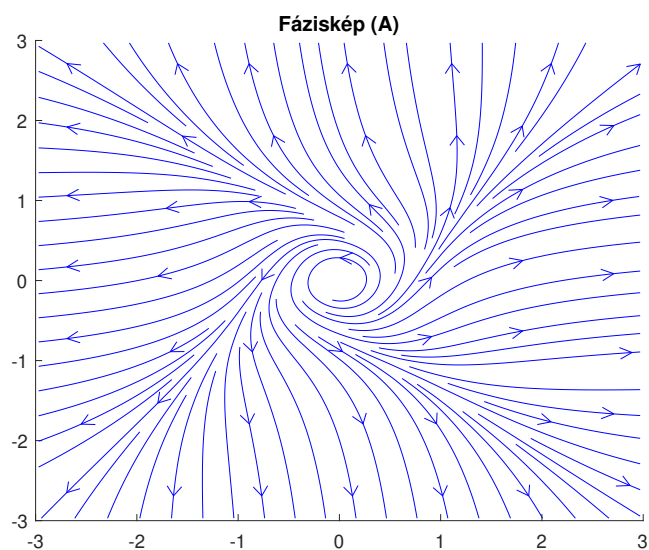
vagyis az egy darab sajátérték 0. Ezekben az esetekben a linearizált rendszer nem árul el semmit az eredetiről.

$$(A) \quad \begin{cases} \dot{x} = -y + x^3 \\ \dot{y} = x + y^3 \end{cases} \quad (B) \quad \begin{cases} \dot{x} = -y - x^3 \\ \dot{y} = x - y^3 \end{cases}.$$

Mindkét rendszernek stacionárius pontja az origó, de míg az (A) esetben instabil, addig a (B) esetben aszimptotikusan stabil. Ezt itt még nem tudjuk igazolni, csupán a bizonyító erővel nem bíró ábrákat mellékeljük, de a következő alfejezetben erre is sor kerül. Ugyanakkor mindkét rendszer esetében a hozzá tartozó linearizált rendszer

$$\begin{cases} \dot{x} = -y \\ \dot{y} = x \end{cases},$$

ami gyakorlatilag egy harmonikus oszcillátor egyenletrendszere. A sajátértékek $\lambda_{1,2} = \pm i$, így $\operatorname{Re} \lambda_{1,2} = 0$. Ezekben az esetekben sem vezet célra a linearizálás.



Gyakorló feladatok:

1. Az előző alfejezet gyakorló példáira alkalmazzunk linearizálást!
-

4.2.3. Stacionárius pontok stabilitásvizsgálata Ljapunov módszerrel

4.2.10. Példa. Kezdjük az előző alfejezet azon példájával, ahol nem működött a linearizálás.

$$\begin{cases} \dot{x} = -y - x^3 \\ \dot{y} = x - y^3 \end{cases}$$

A kérdés az origó stabilitása. Vezessünk be egy $V : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ segédfüggvényt! Ezt az $x - y$ fázissík feletti felületként lehet elképzelni. Míg a trajektóriák a fázissíkon haladnak, addig $V(x(t), y(t))$ a t időpontban a trajektória adott pontjában felvett V értékét méri. Mintha a trajektóriát a felületre vetítenénk és mérnénk a magasságot. Itt a következő választással élünk.

$$V(x, y) := x^2 + y^2,$$

és legyen

$$V^*(t) = V(x(t), y(t)).$$

Ennek segítségével mérni tudjuk a trajektóriák felületre vett vetületének a magasságának változását. Ebben az esetben azt kapjuk, hogy

$$\dot{V}^*(t) = -2(x^4(t) + y^4(t)) < 0,$$

amennyiben $(x(t), y(t)) \neq (0, 0)$. Mire következtethetünk ebből? A felület egy forgásparaboloid, melynek minimumhelye a $(0, 0)$. Továbbá azt kaptuk, hogy a magasság csökken (amennyiben nem a minimumhelyen vagyunk). Ez mindenesetre azt jelenti, hogy a trajektóriák nem távolodhatnak az origótól, vagyis a $(0, 0)$ stacionárius pont stabil. Sejtésünk szerint aszimptotikusan stabil is, de ennek belátása nem triviális (annak ellenére, hogy annak tűnik).

A V segédfüggvényt Ljapunov-függvénynek nevezzük.

A következőkben precízen definiáljuk a Ljapunov-függvény fogalmát és az eljárát, amit a példában alkalmaztunk.

4.2.11. Definíció. Legyen $U \subset M$ nyílt halmaz. A $V \in C^1(U, \mathbb{R})$ Ljapunov-függvény (4.17) rendszer szerinti deriváltja (avagy Lie-deriváltja) az alábbi függvény

$$L_{\mathbf{f}}V = \langle V', \mathbf{f} \rangle, \quad \text{vagyis} \quad (L_{\mathbf{f}}V)(\mathbf{p}) = \langle V'(\mathbf{p}), \mathbf{f}(\mathbf{p}) \rangle, \quad \mathbf{p} \in U$$

4.2.12. Lemma. Legyen $\mathbf{y}$ az (4.17) rendszer egy megoldása, ekkor a $V^*(t) = V(\mathbf{y}(t))$ képlettel értelmezett függvényre teljesül, hogy $\dot{V}^*(t) = (L_{\mathbf{f}}V)(\mathbf{y}(t))$.

Bizonyítás.

$$\dot{V}^*(t) = \langle V'(\mathbf{x}(t)), \dot{\mathbf{x}}(t) \rangle = \langle V'(\mathbf{x}(t)), \mathbf{f}(\mathbf{x}(t)) \rangle = (L_{\mathbf{f}}V)(\mathbf{x}(t))$$

□

Első integrál. Van egy speciális eset, amit érdemes kiemelni, mert gyakorlati szempontból is fontos szerepet játszik.

4.2.13. Definíció. Amh. a $V \in C^1(U, \mathbb{R})$ Ljapunov-függvény a (4.17) rendszer első integrálja, ha $L_{\mathbf{f}}V \equiv 0$.

Vizsgáljunk meg néhány fontos példát.

4.2.14. Példa. Tekintsük a 1.2.1. Példát, amit rögtön átírunk elsőrendű rendszerré.

$$m\ddot{x} = -kx \quad \rightsquigarrow \quad \begin{cases} \dot{x} = v \\ \dot{v} = -\frac{k}{m}x \end{cases}$$

Itt egy megfelelő Ljapunov-függvény az energia segítségével definiálható, így V helyett inkább E -vel jelöljük.

$$E(x, v) := \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2,$$

amely megadja a fázissík adott pontjához tartozó összenergiát, mely a mozgási és a rugóban tárolt energia összege. Könnyű látni, hogy E a rendszer első integrálja, ami azt jelenti, hogy az összenergia nem változik. Mit jelent ez? Ha a fázissíkon ábrázoljuk E izoklínáit (azonos energiaszintű pontjaiból álló görbéket), akkor tudjuk, hogy ha rajta vagyunk egy iziklínán, akkor mindvégig rajta is maradunk. Már csak azt kell meghatározni, hogy milyen irányban mozgunk az adott izoklínán, amit behelyettesítéssel könnyen meghatározhatunk.

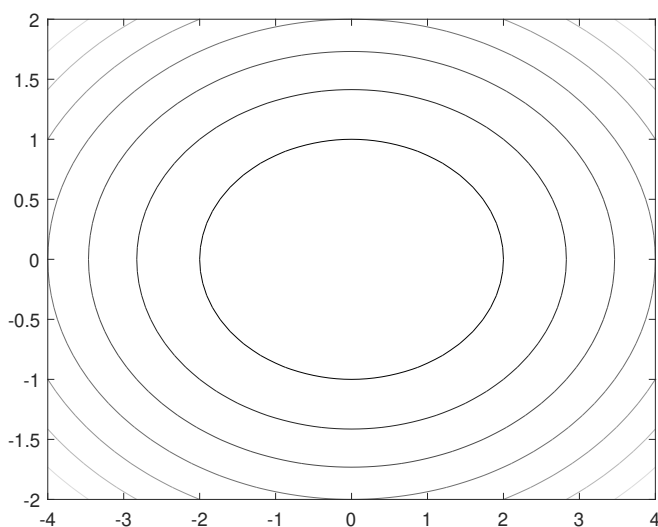
Ebben az esetben az E felületnek minimumhelye van az origóban és máshol nincs, ami azt jelenti, hogy az izoklínák zárt görbék az origó körül. Ez azt jelenti, hogy végtelen sok periodikus pályánk van és az origó stabil, de nem aszimptotikusan stabil.

Mellékeljük a Matlab segítségével ábrázolt izoklínákat.

```

h=0.1;
k=1;
m=4;
[x,v] = meshgrid(-4:h:4,-2:h:2);
E = k/2.*x.^2+m/2.*v.^2;
%colormap(gray(256))
contour(x,v,E);

```



4.21. ábra. A harmonikus oszcillátor izoklínái.

4.2.15. Példa. Másodikként tekintünk a 1.2.10.Példát, mely a matematikai ingát tárgyalta!

$$\ddot{\vartheta} = -\frac{g}{l} \sin \vartheta \quad \rightsquigarrow \quad \begin{cases} \dot{\vartheta} = \omega \\ \dot{\omega} = -\frac{g}{l} \sin \vartheta \end{cases}$$

Ebben az esetben is jó választás Ljapunov-függvénynek az energia.

$$E(\vartheta, \omega) := \frac{\omega^2}{2} - \frac{g}{l} \cos \vartheta,$$

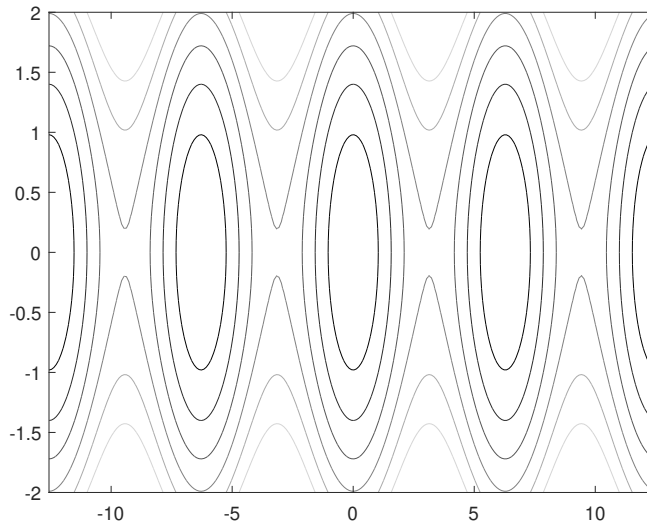
melyről könnyű belátni, hogy a rendszer első integrálja.

Értelmezzük az ábrát!

```

h=0.1;
g=9.81;
l=1;
[theta,omega] = meshgrid(-4*pi:h:4*pi,-2:h:2);
E = g./l.*cos(theta)-omega.^2/2;
%colormap( flipud(gray(256)) )
contour(theta,omega,E);

```



4.22. ábra. Az egyszerű inga izoklínái.

4.2.16. Példa. Folytassuk egy biológiai modellel! Képzeljünk el egy szigetet, ahol korlátlan mennyiségű fű nő. Ezenkívül két ottlakó állatfaj van csupán a szigeten: nyulak és rókák. A korlátlan tápanyag exponenciálisan növekedő nyúlpopulációt eredményezne, ha nem volnának rókák. Ezt $\dot{x} = x$ egyenlet írná le (az egyszerűség kedvéért, minden konstans egynek választunk, mellyel nem befolyásoljuk a rendszert kvalitatív szempontból). A rókák hatását úgy jelenítjük meg, hogy a rókák és nyulak találkozása negatívan befolyásolja a nyúlpopulációt, mely találkozások gyakorisága az xy mennyiséggel arányos (az Olvasó indokolja meg, hogy miért). A rókák nyulak nélkül kihalnának: $\dot{y} = -y$, de ezt módosítja a nyulak jelenléte, az xy tag itt pozitívan befolyásolja a rókapopulációt. Ezek alapján a következő rendszert tudjuk felírni.

$$\begin{cases} \dot{x} = x(1 - y) \\ \dot{y} = y(x - 1) \end{cases} \quad (\text{Lotka-Volterra rendszer})$$

Mely számunkra csak akkor érdekes, ha $x, y \geq 0$. (x -et és y -t ne darabszámnak, hanem mondjuk a populáció össztömegének tekintsük!)

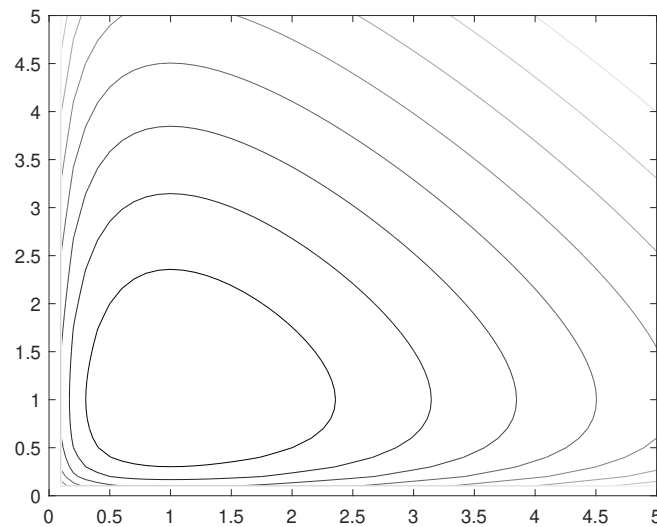
Ha megrajzoljuk a fázisképet, akkor azt látjuk, hogy az egyensúlyi pontok az $(0,0)$ és $(1,1)$. Látható, akár a fáziskép alapján, akár linearizálással, hogy az $(0,0)$ instabil, nyereg, de az $(1,1)$ esetében csak azt látjuk, hogy a trajektóriák körbejárják, de a stabilitása nem derül ki, sőt a linearizálás sem vezet eredményre.

Vezessük be az alábbi Ljapunov-függvényt:

$$V(x, y) = x + y - \log y - \log x$$

mely a rendszer első integrálja. Ha megvizsgáljuk a V függvényt, akkor kapjuk, hogy ennek az $(1,1)$ (lokális) szélsőértékhelye így az izoklínák zárt görbék körülötte. Ez azt jelenti, hogy végtelen sok periodikus pályánk van, az $(1,1)$ stacionárius pont stabil, de nem aszimptotikusan stabil.

```
h=0.1;
[x,y] = meshgrid(0:h:5,0:h:5);
V = x+y-log(y)-log(x);
%colormap(gray(256))
contour(x,y,V);
```



4.23. ábra. A Lotka-Volterra rendszer izoklínái.

Láthatjuk, hogy az első integrál így nagyon hasznos fogalom, a kérdés már csak az, hogy miképp lehet ilyet konstruálni?

Fizikai háttérű példáknál láttuk, hogy az energia, mint Ljapunov-függvény jól tud működni, hiszen azokban az esetekben, amiket vizsgáltunk tudtuk, hogy az energia megőrződik. Bármilyen megőrződő nem triviális mennyiség jó első integrálnak.

De mi a helyzet a Lotka-Volterra rendszerrel, ami biológiai háttérű? Mutatunk egy módszert, ami kétdimenziós autonóm rendszerek esetében működik, függetlenül attól, hogy mit modellezünk vele. A fáziskép trajektóriáit megadhatjuk, mint egy $\{y(x)\}$ függvénycsalád. Ezt a függvénycsaládot meg tudjuk adni, mint egy differenciálegyenlet megoldásai. A differenciálegyenlet pedig a következő:

$$y' = \frac{f_2(x, y)}{f_1(x, y)},$$

ahol y' az $y(x)$ függvény x szerinti deriváltját jelöli. A formula könnyen megkapható, ha a rendszer második egyenletét formálisan elosztjuk az elsővel. (Az Olvasó indokolja meg, hogy miért működik ez az eljárás!)

Tekintsük újra a Lotka-Volterra rendszert. Ezek szerint

$$y' = \frac{y(x-1)}{x(1-y)},$$

mely egy szétválasztható változójú differenciálegyenlet. Átrendezve és integrálva kapjuk, hogy

$$\log y - y = x - \log x + C,$$

ahol $C \in \mathbb{R}$. A megfelelő első integrált innen átrendezéssel kapjuk:

$$V(x, y) := x + y - \log x - \log y,$$

melyről tudjuk, hogy a trajektóriák mentén konstans, ami pont azt jelenti, hogy $\dot{V}^*(t) = 0$, vagyis első integrál.

Ljapunov tételek. A következőkben a Ljapunov tételeket tárgyaljuk, melyek segítségével stacionárius pontok stabilitása, aszimptotikus stabilitása, vagy instabilitása igazolható.

4.2.17. Tétel. *(Ljapunov stabilitási tétele) Legyen $\mathbf{p}$ a (4.17) rendszer stacionárius pontja. Legyen $U \subset M$ egy nyílt környezete $\mathbf{p}$ -nek és legyen $V : U \rightarrow \mathbb{R}$ olyan folytonosan differenciálható Ljapunov-függvény, mely rendelkezik a következő két tulajdonsággal:*

1. $V(\mathbf{p}) < V(\mathbf{q}), \forall \mathbf{q} \in U \setminus \{\mathbf{p}\};$
2. $(L_{\mathbf{f}}V)(\mathbf{q}) \leq 0, \forall \mathbf{q} \in U \setminus \{\mathbf{p}\}.$

Ekkor a $\mathbf{p}$ stacionárius pont stabil.

Bizonyítás. A bizonyítás lépéseit pontokba szedjük az átláthatóság kedvéért.

- Vegyünk egy olyan gömböt amely már teljes egészében benne van a jobb oldal értelmezési tartományában: $\exists \varrho < \varepsilon, \overline{B_{\varrho}(\mathbf{p})} \subset U$
- Tekintsük ennek a határát, mely korlátos és zárt. Mivel véges dimenzióban vagyunk így alkalmazhatjuk erre a határhalmazra és a V függvényre 5.1.9. Weierstrass-tételét: $\exists \alpha = \min \{V(\mathbf{q}) : \|\mathbf{q} - \mathbf{p}\| = \varrho\}$, ekkor $\alpha > V(\mathbf{p})$, hiszen $\mathbf{p}$ globális minimumhelye V -nek U -ban.
- Tekintsük azon pontok halmazát, ahol V értéke kisebb, mint α : $G = \{\mathbf{q} \in B_{\varrho}(\mathbf{p}) : V(\mathbf{q}) < \alpha\}$, mely egy nyílt halmaz V folytonossága miatt, továbbá tartalmazza $\mathbf{p}$ -t. Ekkor $\exists \delta > 0 : B_{\delta}(\mathbf{p}) \subset G, V(\mathbf{q}) < \alpha, \forall \mathbf{q} \in B_{\delta}(\mathbf{p})$, tehát van ilyen nyílt gömb is ezzel a tulajdonsággal $\mathbf{p}$ középponttal.
- Ha $B_{\delta}(\mathbf{p})$ -ből indulunk, akkor nem hagyjuk el $B_{\varepsilon}(\mathbf{p})$ -t. Hiszen ha $\mathbf{q} \in B_{\delta}(\mathbf{p})$, akkor $V(\varphi(t, \mathbf{q})) \leq V(\varphi(0, \mathbf{q})) = V(\mathbf{q}) < \alpha, t \in \mathbb{R}_0^+$.

□

4.2.18. Példa. Tekintsük az 4.2.14. Példát! A kérdés $\mathbf{p} = (0, 0)$ stacionárius pont stabilitása. Itt már találtunk egy $E(x, v) = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2$ első integrált, vagyis az E függvényre teljesült, hogy $(L_{\mathbf{f}}E)(\mathbf{q}) = 0, \forall \mathbf{q} \in \mathbb{R}^2$. Tehát a tétel első feltétele teljesül. Másrészt könnyen látható, hogy $\mathbf{p}$ minimumhelye E -nek, így a feltétel másik pontja is teljesül, tehát $\mathbf{p}$ stabil.

4.2.19. Példa. Tekintsük a csillapított oszcillátor egyenletét!

$$m\ddot{x} = -kx + s(v), \quad \rightsquigarrow \quad \begin{cases} \dot{x} = v \\ \dot{v} = -\frac{k}{m}x + \frac{s(v)}{m} \end{cases}$$

ahol $vs(v) < 0$, ha $v \neq 0$, illetve $s(v) = 0$, ha $v = 0$. Vagyis feltettük, hogy van valamilyen s függvénnyel megadott csillapítás (légellenállás, vagy

súrlódás), ami a sebességtől függ és vele ellenkező irányba hat. Ljapunov-függvénynek most is az energiát választjuk: $E(x, v) = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2$. Ekkor

$$\dot{E}^* = v s(v) \leq 0.$$

Az egyik feltétel tehát teljesül, míg a második feltételt már az előző példában leellenőriztük. Az origó tehát stabil. Hozzá kell tennünk, hogy ennél több is igaz, de ennek igazolására nem alkalmas ez a tétel.

4.2.20. Tétel. *(Ljapunov aszimptotikus stabilitási tétele) Legyen $\mathbf{p}$ a (4.17) rendszer stacionárius pontja. Legyen $U \subset M$ egy nyílt környezete $\mathbf{p}$ -nek és legyen $V : U \rightarrow \mathbb{R}$ olyan folytonosan differenciálható Ljapunov-függvény, mely rendelkezik a következő két tulajdonsággal:*

1. $V(\mathbf{p}) < V(\mathbf{q}), \forall \mathbf{q} \in U \setminus \{\mathbf{p}\};$
2. $(L_{\mathbf{f}}V)(\mathbf{q}) < 0, \forall \mathbf{q} \in U \setminus \{\mathbf{p}\}.$

Ekkor a $\mathbf{p}$ stacionárius pont aszimptotikusan stabil.

Bizonyítás. A bizonyítás lépéseit pontokba szedjük az átláthatóság kedvéért.

- A feltételekből következik a $\mathbf{p}$ stacionárius pont stabilitása, lásd Ljapunov stabilitási tételét. Legyenek $\varepsilon, \varrho, \delta$ mint az előbbi tételben.
- Fogalmazzuk meg az állítást: $\forall \mathbf{q} \in B_\delta(\mathbf{p})$ esetén $\forall \eta > 0 \exists T > 0 \forall t \geq T$, esetén $\varphi(t, \mathbf{q}) \in B_\eta(\mathbf{p})$. Ez jelenti azt, hogy a trajektóriák tartanak a stacionárius ponthoz.
- Indirekt utat választunk ennek igazolására, vagyis tegyük fel a következőt: $\exists \mathbf{q} \in B_\delta(\mathbf{p}), \exists \eta > 0 \forall T > 0 \exists t \geq T$, hogy $\varphi(t, \mathbf{q}) \notin B_\eta(\mathbf{p})$.
- η -hoz (ebben a szereposztásban η a régi ε) a stabilitás miatt $\exists \delta_\eta > 0$, hogy $\varphi(t, \mathbf{q}) \in B_\eta(\mathbf{p}), \forall \mathbf{q} \in B_{\delta_\eta}(\mathbf{p})$.
- Mi indirekte feltettük, hogy kijutunk a $B_\eta(\mathbf{p})$ gömbből, ami azt jelenti, hogy nem mehetünk bele a $B_{\delta_\eta}(\mathbf{p})$ gömbbe. Tehát $\varphi(t, \mathbf{q}) \in H = \overline{B_\varrho(\mathbf{p})} \setminus B_{\delta_\eta}(\mathbf{p})$
- H korlátos és zárt, tehát 5.1.9. Weierstrass-tétele szerint: $\exists \min_H V > -\infty$, illetve $\exists \max_H L_{\mathbf{f}}V = \beta < 0$.

- Ugyanakkor

$$V^*(t) = V^*(0) + \int_0^t \dot{V}^*(s) \, ds \leq V^*(0) + \beta t \rightarrow -\infty$$

mely ellentmondás. Ezzel bizonyítottuk az állítást.

□

4.2.21. Példa. Tekintsük újra ezen alfejezet bevezető 4.2.10.Példáját. Itt mutattunk egy Ljapunov-függvényt, melyre az előző tétel mindkét feltétele teljesül, így az origó aszimptotikusan stabil, ahogy azt korábban sejtettük.

A következő tétel az előző egy élesebb változata, amit bizonyítás nélkül közlünk.

4.2.22. Tétel. (*Barbasin–Kraszovszkij tétel/ La Salle-elv*) Legyen $\mathbf{p}$ a (4.17) rendszer stacionárius pontja. Legyen $U \subset M$ egy nyílt környezete $\mathbf{p}$ -nek és legyen $V : U \rightarrow \mathbb{R}$ olyan folytonosan differenciálható Ljapunov-függvény, mely rendelkezik a következő három tulajdonsággal:

1. $V(\mathbf{p}) < V(\mathbf{q}), \forall \mathbf{q} \in U \setminus \{\mathbf{p}\};$
2. $(L_{\mathbf{f}}V)(\mathbf{q}) \leq 0, \forall \mathbf{q} \in U \setminus \{\mathbf{p}\};$
3. $a \, t \mapsto \mathbf{p}$ megoldáson kívül az U halmazban nem halad olyan megoldás, melynek mentén V értéke állandó.

Ekkor a $\mathbf{p}$ stacionárius pont aszimptotikusan stabil.

4.2.23. Példa. Vegyük újra elő a csillapított oszcillátor egyenletét, lásd 4.2.19.Példa! Láttuk, hogy $\dot{E}^* = v s(v)$, sőt tudjuk, hogy

$$\dot{E}^* < 0, \quad \text{ha } v \neq 0.$$

Ha olyan pontban vagyunk, ahol $v \neq 0$, akkor ezen a trajektórián nem lesz állandó E értéke. Tegyük fel, hogy olyan pontban vagyunk, ahol $v = 0$, de $x \neq 0$. Helyettesítsük be ezt a pontot a

$$\dot{v} = -\frac{k}{m}x + \frac{s(v)}{m}$$

egyenletbe! Mivel $s(v) = 0$ ebben a pontban, így itt $\dot{v} = -\frac{k}{m}x \neq 0$, ami azt jelenti, hogy elhagyjuk a $v = 0$ egyenest. Innen lásd azt az esetet, ahol $v \neq 0$. Ezzel beláttuk az előző tétel mindhárom feltételének teljesülését, így az origó aszimptotikusan stabil.

4.2.24. Tétel. (*Ljapunov instabilitási tétele*) Legyen $\mathbf{p}$ a (4.17) rendszer stacionárius pontja. Legyen $U \subset M$ egy nyílt környezete $\mathbf{p}$ -nek és legyen $V : U \rightarrow \mathbb{R}$ olyan folytonosan differenciálható Ljapunov-függvény, mely rendelkezik a következő két tulajdonsággal:

1. $\mathbf{p}$ nem lokális minimumhelye a V függvénynek;
2. $(L_{\mathbf{f}}V)(\mathbf{q}) < 0, \forall \mathbf{q} \in U \setminus \{\mathbf{p}\}$.

Ekkor a $\mathbf{p}$ stacionárius pont instabil.

Bizonyítás. A bizonyítás lépéseit pontokba szedjük az átláthatóság kedvéért.

- Fogalmazzuk meg az állítást: $\exists \varepsilon > 0 \forall \delta > 0 \exists \mathbf{p}_\delta \in B_\delta(\mathbf{p})$ melyre $\exists t > 0$ esetén $\varphi(t, \mathbf{p}_\delta) \notin B_\varepsilon(\mathbf{p})$.
- Mivel $\mathbf{p}$ nem lokális minimumhelye V -nek, így $\forall \delta > 0 \exists \mathbf{q} \in B_\delta(\mathbf{p})$, hogy $V(\mathbf{q}) < V(\mathbf{p})$. Legyen $\mathbf{p}_\delta$ egy ilyen tulajdonságú $\mathbf{q}$.
- Választunk egy tetszőleges $c_\delta \in (V(\mathbf{p}_\delta), V(\mathbf{p}))$ értéket, ekkor $\mathbf{p}$ -nek van olyan környezete, mely szigorúan "magasabban" van, mint $\mathbf{p}_\delta$: $\exists \eta > 0$, hogy $V(\mathbf{q}) > c_\delta \forall \mathbf{q} \in B_\eta(\mathbf{p})$.
- Mivel $L_{\mathbf{f}}V < 0$, így nem mehetünk bele ebbe a környezetbe: $\varphi(t, \mathbf{p}_\delta) \notin B_\eta(\mathbf{p})$
- Innen indirekt módon bizonyítunk: tfh. $\varphi(t, \mathbf{p}_\delta) \in \overline{B_\varepsilon(\mathbf{p})}$.
- Ekkor $\varphi(t, \mathbf{p}_\delta) \in \overline{B_\varepsilon(\mathbf{p})} \setminus B_\eta(\mathbf{p})$ és innen ugyanaz a befejezés, mint az aszimptotikus stabilitási tételnél.

□

4.2.25. Példa. Tekintsük az alábbi rendszert!

$$\begin{cases} \dot{x} = y - x \\ \dot{y} = x + y \end{cases}$$

Ez egy lineáris rendszer, melynek egyetlen stacionárius pontja az origó. Ennek stabilitását ugyan eldönthetnénk linearizálással is, de itt Ljapunov módszerét választjuk. Legyen $V(x, y) = x^2 - y^2$, ekkor $\dot{V}^*(t) = -(x^2(t) + y^2(t))$. Vagyis az előző tétel második feltétele teljesül. Továbbá könnyen látható, hogy az origó nem lokális minimumhelye a V függvénynek, így a tétel első feltétele is teljesül. Tehát az origó instabil.

Gyakorló feladatok:

1. Alkalmazzunk linearizálást az alfejezet példáira. Mikor működik a linearizálás és mikor nem?
2. (a) A 4.2.14.Példa esetében rajzoljuk meg a fázisképet (ehhez már csak az irányokat kell megállapítanunk a trajektóriákon) és ellenőrizzük le, hogy az energia valóban első integrál! Konstruáljuk meg az első integrált a tanult módon!
- (b) A 4.2.15.Példa esetében rajzoljuk meg a fázisképet (ehhez már csak az irányokat kell megállapítanunk a trajektóriákon) és ellenőrizzük le, hogy az energia valóban első integrál, továbbá mutassuk meg, hogy valóban ez a formula adja meg a rendszer összenergiáját! Konstruáljuk meg az első integrált a tanult módon!
- (c) A 4.2.16.Példa esetében rajzoljuk meg a fázisképet (ehhez már csak az irányokat kell megállapítanunk a trajektóriákon) és ellenőrizzük le, hogy az adott függvény valóban első integrál. Továbbá mutassuk meg, hogy ezen függvénynek valóban lokális szélsőérték helye az $(1, 1)$ pont! Magyarázzuk meg, hogy mit jelent mindez a biológiai modellre vonatkoztatva!
3. Keressük meg az alábbi rendszerek első integrálját és ez alapján rajzoljuk meg a fázisképeket!

(a)

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = x - x^3 \end{cases}$$

(b)

$$\begin{cases} \dot{x} = \cos x \sin y \\ \dot{y} = -\cos y \sin x \end{cases}$$

(c) Lotka–Volterra rendszer, általános eset:

$$\begin{cases} \dot{x} = x(a - y) \\ \dot{y} = y(x - b) \end{cases}$$

4. Az eddigi példák első integráljainak rajzoljuk ki Matlabbal az izoklínáit!

5. Keressünk az alábbi rendszerekhez Ljapunov-függvényt $V(x, y) = ax^\alpha + by^\beta$ alakban, majd alkalmazzuk a megfelelő Ljapunov tételt a $(0, 0)$ stacionárius pont stabilitásának eldöntéséhez!

(a)

$$\begin{cases} \dot{x} = -x + 5y^2 \\ \dot{y} = -3xy \end{cases}$$

(b)

$$\begin{cases} \dot{x} = -x^3 - 2xy \\ \dot{y} = 2x^2 - 6y \end{cases}$$

(c)

$$\begin{cases} \dot{x} = 2xy^5 - 4x^5 \\ \dot{y} = -3x^2 - 2y \end{cases}$$

(d)

$$\begin{cases} \dot{x} = 3y^4 - 2x^4 \\ \dot{y} = 5yx^2 + 3y \end{cases}$$

(e)

$$\begin{cases} \dot{x} = -xy^4 \\ \dot{y} = x^6y \end{cases}$$

(f)

$$\begin{cases} \dot{x} = -2y - 2xy^6 + 4xy^4 \\ \dot{y} = x^3 - x^4y - y \end{cases}$$

6. Tekintsük a Lotka–Volterra rendszert vadászattal:

$$\begin{cases} \dot{x} = x(1 - y - H) \\ \dot{y} = y(x - 1 - H) \end{cases}$$

ahol $H > 0$ a vadászati állandó. Elemezzük a rendszert! Továbbá állapítsuk meg, hogy a vadászat melyik fajnak kedvez! (Ehhez vizsgáljuk a populációk időbeli átlagát.)

4.2.4. Periodikus pályák

Poincaré-Bendixson tétel. Az előző alfejezetben már láttunk olyan példákat, ahol egy rendszernek volt periodikus pályája. Ezekben az esetekben nem csak egy periodikus pálya volt, hanem végtelen sok. Ha nem végtelen sok periodikus pályája van egy rendszernek, akkor ennek igazolásához más technikát kell alkalmaznunk. Külön hangsúlyozzuk, hogy ez a technika csak két dimenzióban működik! Egy példán szemléltetjük a működését.

4.2.26. Példa. Tekintsük a következő rendszert!

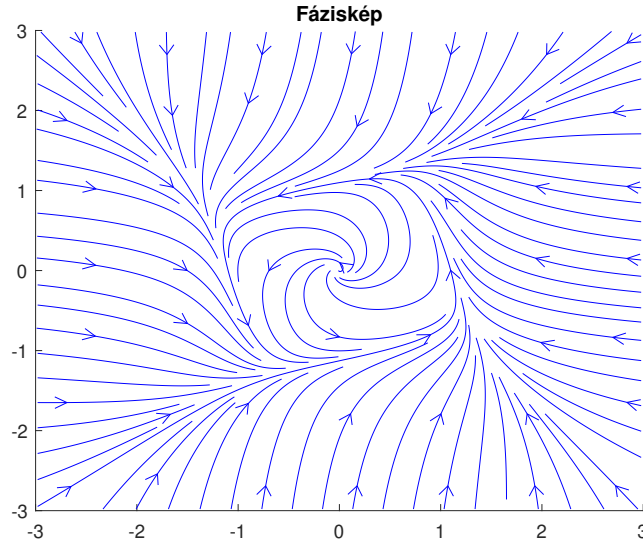
$$\begin{cases} \dot{x} = x - y - x^3 \\ \dot{y} = x + y - y^3 \end{cases} \quad (4.19)$$

Ezt a rendszert úgy is felfoghatjuk, mint egy harmonikus oszcillátort egy speciális kontrollal:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x - x^3 \\ y - y^3 \end{pmatrix},$$

ahol a kontroll az utolsó tag. Nélküle a rendszer trajektóriái koncentrikus körök lennének, de ez a tag ezt megváltoztatja. Ha elég közel vagyunk az origóhoz, akkor ez a tag az origótól elfelé "taszításként" lép fel, míg ha elég távol, akkor az origó felé "vonzásként". Ezt alátámasztja a Matlab által rajzolt fáziskép is. Az ábra azt sugallja, hogy van egy periodikus pálya. Az alábbiakban pontokba szedtük annak lépéseit, hogy miképp tudjuk ezt igazolni.

1. Könnyen megmutatható, hogy az egyetlen stacionárius pont az origó.
2. Tekintsük a $V(x, y) = x^2 + y^2$ Ljapunov-függvényt, aminek segítségével igazoljuk, hogy a $H = \{(x, y) : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 2\}$ korlátos és zárt halmaz pozitívan invariáns. Ebből a halmaz korlátossága és zártsága triviális. Az hogy *pozitívan invariáns*, az azt jelenti, hogy ha ebből a halmazból



4.24. ábra. A (4.19) rendszer fázisképe.

indulunk, akkor ebben a halmazban is maradunk $t \in \mathbb{R}^+$ esetben. Jelen esetben ez a kontroll tag hatásának köszönhető.

A pozitív invariancia igazolásához be lehet látni, hogy

- (a) $(L_{\mathbf{f}}V)(x, y) > 0$, ha $(x, y) : 1 > x^2 + y^2$, ami azt jelenti, hogy a H halmazból nem juthatunk ki az $K_1 = \{(x, y) : 1 = x^2 + y^2\}$ határoló körön át;
- (b) $(L_{\mathbf{f}}V)(x, y) < 0$, ha $(x, y) : 2 < x^2 + y^2$, ami azt jelenti, hogy a H halmazból nem juthatunk ki az $K_2 = \{(x, y) : 2 = x^2 + y^2\}$ határoló körön át.

Vagyis benne maradunk a halmazban.

3. A (manuálisan rajzolt) fáziskép azt mutatja, hogy a H halmazban körbejárnak a pályák.
4. Tekintsük az x -tengelyen a $\Sigma = [1, \sqrt{2}]$ Poincaré-metszetet és értelmezzük a $P : \Sigma \rightarrow \Sigma$ visszatérési leképezést úgy, hogy $P(x)$ legyen az az $y \in \Sigma$ pont melyet úgy kapunk, hogy az x -ből induló trajektória következő metszéspontját vesszük Σ -val. Megmutatható, hogy P folytonos leképezés.

5. A Bolzano-tétel segítségével igazolható, hogy P -nek van fixpontja. Ami pontosan azt jelenti, hogy H -ban van periodikus pálya.

Ez a gondolatmenet általánosan is végigvihető, amit a következő tételben foglaltunk össze (bizonyítás nélkül, bár ennek sok lépése pont úgy megy, mint a 4.2.26. Példa bizonyításánál).

4.2.27. Tétel. *(Poincaré-Bendixson tétel gyenge alakja) Tekintsünk egy kétdimenziós (4.17) autonóm rendszert, melyben a megoldások értelmezve vannak $\forall t \in \mathbb{R}$ esetén. Ha létezik olyan $H \subset M$ halmaz mely*

- *korlátos és zárt*
- *pozitívan invariáns*
- *nincs benne stacionárius pont*

akkor a H halmazban van periodikus pálya.

Bendixson-kritérium. Míg az előző paragrafusban azt mutattuk meg, hogy miként lehet periodikus pálya létezését bizonyítani, addig ebben a paragrafusban arra mutatunk technikát, hogy miként lehet kizárni periodikus pálya létezését.

4.2.28. Tétel. *(Bendixson-kritérium) Legyen $E \subset \mathbb{R}^2$ egyszeresen összefüggő nyílt halmaz, melyben $\operatorname{div} \mathbf{f}$ előjele azonos. Ekkor nincs olyan periodikus pálya, mely teljes egészében E -ben halad.*

Bizonyítás. Indirekt bizonyítjuk az állítást. Tfh. $\exists (x(t), y(t))$ periodikus pálya E -ben. Ez egy zárt görbét definiál, melyet Γ -val jelölünk. Ennek normálvektora $(\dot{y}(t), -\dot{x}(t))$.

Alkalmazzuk Gauss divergencia tételét:

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{f} \, d\Omega = \int_{\Gamma} \langle \mathbf{f}, \mathbf{n} \rangle \, d\Gamma, \quad (\text{Gauss divergencia tétel})$$

ahol a bal oldal nem 0, míg a jobb oldal 0, ami ellentmondás. Ezzel igazoltuk az állítást. $\square$

4.2.29. Példa. Tekintsük az alábbi rendszert!

$$\begin{cases} \dot{x} = x - xy^2 + y^3 \\ \dot{y} = 3y - x^2y + x^3 \end{cases}$$

Számítsuk ki $\mathbf{f}$ divergenciáját:

$$\operatorname{div} \mathbf{f} = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} = 1 - y^2 + 3 - x^2 = 4 - (x^2 + y^2) .$$

Könnyen látható, hogy ennek értéke pozitív a $B_2((0,0))$ nyílt körlapon, míg negatív a körlap lezártján kívül. Mindkét halmaz nyílt, de csak a körlap egyszerűen összefüggő. Ez azt jelenti, hogy a tétel alapján arra következtethetünk, hogy nincs a körlapon belül haladó periodikus pálya, illetve olyan sem, amit bele tudunk foglalni egy tartományba, mely része a körlapon kívüli tartománynak és egyszerűen összefüggő, vagyis nincs benne "lyuk". Vegyük észre, hogy ezzel nem zártuk ki olyan periodikus pálya létezését, mely a körön kívül halad és megkerüli az origót. Természetesen az olyat sem, amely belemegy mindkét tartományba.

4.2.30. Tétel. (*Bendixson–Dulac-kritérium*) Legyen $E \subset \mathbb{R}^2$ egyszerűen összefüggő nyílt halmaz. Legyen továbbá $g : E \rightarrow \mathbb{R}$ differenciálható függvény, melyre igaz, hogy $\operatorname{div}(g\mathbf{f})$ előjele azonos. Ekkor nincs olyan periodikus pálya, mely teljes egészében E -ben halad.

Ennek bizonyítását a feladatok közt tűztük ki.

4.2.31. Példa. Tekintsük az alábbi rendszert!

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = x - ay + 2x^2 + by^2 \end{cases}$$

Válasszuk a $g(x, y) = ae^{-2bx}$ függvényt. Ekkor

$$\operatorname{div} g\mathbf{f} = -a^2e^{-2bx} ,$$

mely negatív tetszőleges $a \neq 0$ esetén. Ekkor azt állíthatjuk, hogy ennek a rendszernek nincs periodikus pályája.

1. Igazoljuk a 4.2.26.Példa egyes pontjait! Ehhez segítség:

1. Számolás.
2. (a) Az adott tartományban $x^2 > x^4$, hasonlóképp y -ra.
2. (b) Az adott tartományban

$$2(x^2 + y^2) < (x^2 + y^2)^2 = x^4 + y^4 + 2x^2y^2,$$

majd használjuk fel (előtte igazoljuk!), hogy

$$x^2y^2 = \sqrt{x^4y^4} \leq \frac{x^4 + y^4}{2}.$$

3. Rajzoljuk meg kézzel a fázisképet!
 4. Rajzoljunk és használjuk, hogy a trajektóriák nem metszhetik egymást. Használjuk a folytonosság definícióját!
 5. Vizsgáljuk a $P(x) - x$ függvényt!
2. Bizonyítsuk be, hogy a

$$\begin{cases} \dot{x} = -x^3 + 6x - 6y \\ \dot{y} = 4x - 2x^2y \end{cases}$$

rendszernek van periodikus pályája a $H = \{(x, y) : 6 \leq 2x^2 + 3y^2 \leq 12\}$ halmazban.

3. Bizonyítsuk be, hogy a

$$\begin{cases} \dot{x} = y^3 + x(1 - 4x^4 - y^4) \\ \dot{y} = -x^3 \end{cases}$$

rendszernek van periodikus pályája a $H = \left\{ (x, y) : \frac{1}{4} \leq x^4 + y^4 \leq 1 \right\}$ halmazban.

4. Az alábbi rendszerekre alkalmazzuk a Bendixson-kritériumot, vagy a Bendixson–Dulac-kritériumot. Mire következtethetünk?

- (a) Az (4.19) rendszer.

(b)

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + x^2 - xy \\ \dot{y} = x + xy \end{cases}$$

$$\text{Segítség: } g(x, y) = \frac{1}{(x+1)(1+y)^3}.$$

5. Bizonyítsuk a Bendixson–Dulac-kritériumról szóló tételt!

4.3. Matlab

A Matlab beépített megoldófüggvényei természetesen rendszereket is képesek kezelni. De mielőtt ezeket alkalmazná az ember, érdemes leprogramozni néhány egyszerű algoritmust, mint az EE, IE Newton-iterációval és az RK4, mindezeket a legegyszerűbb módon, vagyis állandó lépésközzel. Programozni csak úgy tud megtanulni az ember, ha kísérletezik.

Tekintsünk egy fontos egyenletet, amelyen érdemes kísérletezni!

$$\begin{cases} \ddot{y}(t) = \mu(1 - y^2(t))\dot{y}(t) - y(t) \\ y(0) = c_1 \\ \dot{y}(0) = c_2 \end{cases} \quad (\text{Van der Pol egyenlet})$$

ahol $t \in [0, 20]$. Ismert, hogy nagy μ értékekre az egyenlet merev, így ezekben az esetekben implicit módszert érdemes alkalmazni.

- Elsőnek legyen μ kicsi, tehát explicit módszerek is szóba jönnek a megoldás közelítésére. Az Olvasó feladata az, hogy programozza le a RK4 módszert erre a feladatra. Segítségül megadtuk az EE egy lehetséges kódját. Vegyük észre, hogy első lépésként a magasabbrendű egyenletet átírtuk elsőrendű rendszerre.

```
function vdpEE(T,N,mu,c1,c2)
% van der Pol equation
% y'=\mu(1-y^2)y'-y
% y(0)=c_1, y'(0)=c_2
% Explicit-Euler
```

```

% % % % % % % % % % % % % %

h=T/N % stepsize
t=linspace(0,T,N+1); % grid
y=zeros(2,N+1); % numerical solution

% EE:
y(:,1)=[c1 c2]';
for j=1:N
    y(:,j+1)=y(:,j)+h*vdp(mu,y(:,j));
end

subplot(1,2,1)
plot(t,y(1,:), '-')
xlabel('Idő')
subplot(1,2,2)
plot(y(1,:),y(2,:))
title('Fáziskép')
end
%
function dy = vdp(mu,y)
% van der Pol equation

dy = zeros(2,1);
dy(1) = y(2);
dy(2) = mu*(1 - y(1)^2)*y(2) - y(1);
end

```

- Másodjára ugyanez a feladat, de most legyen μ nagy, így az Olvasó IE módszert Newton-iterációval kombináljon a megoldás közelítésére! Fontos megjegyezzük, hogy a Newton-iteráció magasabb dimenzióban a következőképp néz ki:

Legyen az egyenlet, melynek megoldását közelíteni szeretnénk, $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$, $\mathbf{F} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, ekkor

$$\mathbf{x}^{(n+1)} = \mathbf{x}^{(n)} - (\mathbf{F}'(\mathbf{x}^{(n)}))^{-1} \mathbf{F}(\mathbf{x}^{(n)}) \quad (\text{Newton-iteráció})$$

a Newton-iteráció formulája.

- Végül az Olvasó kísérletezzon a beépített megoldófüggvényekkel különböző μ értékekre!

5. fejezet

Függelék

Ebben a részben összefoglaljuk azokat az analízis illetve lineáris algebrai alapfogalmakat és tételeket, amikre a könyvben támaszkodni fogunk. Így ezek a részek inkább listaszerűek - hiszen az Olvasó már tanulta ezeket a témákat - de néhol szükségét éreztük akár a bizonyítások alapötletének rögzítésére, ahol ez haszonnal jár a továbbiak tekintetében, vagy a könyv további részével való kapcsolatot próbáltuk minél inkább kihangsúlyozni.

Ezért, ha az Olvasó úgy is érzi, hogy eléggé jártas az alapokban, mégis érdemes legalább átfutni ezt az összefoglalót!

5.1. Analízis

Sorozatok.

5.1.1. Definíció. Azt mondjuk, hogy az $\mathbb{R}$ -beli (x_n) sorozat

- *konvergens*, ha $\exists a \in \mathbb{R}$ (a határérték), hogy $\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N}$, hogy $\forall n > N$ -re $|x_n - a| < \varepsilon$.

Jel: $\lim x_n = a$ / $x_n \rightarrow a$.

- *Cauchy-sorozat*, ha $\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N}$, hogy $\forall m, n > N$ -re $|x_n - x_m| < \varepsilon$.

5.1.2. Tétel. $\mathbb{R}$ -beli (x_n) sorozat pontosan akkor konvergens, ha Cauchy-sorozat.

Ez a tétel habár triviálisnak tűnhet, elég nehéz bizonyítani! Az Olvasó próbálja meg belátni a könnyű részt: ha egy valós számsorozat konvergens,

akkor Cauchy-sorozat! A másik irány a nehéz. Felvetődhet a kérdés, hogy ha ezen két fogalom igazából ugyanazt takarja, akkor miért kell megkülönböztetnünk őket? Ezzel kapcsolatban két fontos dolgot kell hangsúlyoznunk:

- a praktikus különbség, miszerint a Cauchy-sorozat definíciója nem tartalmazza az a határértéket, ami sokszor nem ismert pl. $x_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^3}$.
- Ne felejtsük el, hogy valós számsorozatokról beszélünk, más sorozatok esetében a két fogalom nem lesz feltétlenül egyenértékű!

Függvények határértéke, folytonossága.

5.1.3. Definíció. Legyen $D \subset \mathbb{R}$. Azt mondjuk, hogy az $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ fv. *határértéke* az $a \in D$ pontban $b \in \mathbb{R}$, ha $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$, hogy ha $x \in D$ és $0 < |x - a| < \delta$, akkor $|f(x) - b| < \varepsilon$.

Jel: $\lim_a f = b$.

5.1.4. Definíció. Legyen $D \subset \mathbb{R}$. Azt mondjuk, hogy az $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ fv. *folytonos* az $a \in D$ pontban, ha $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$, hogy ha $x \in D$ és $|x - a| < \delta$, akkor $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

Amh. f folytonos, ha folytonos $\forall a \in D$ pontban.

Az Olvasó gondolja végig, hogy az $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x}$ függvény folytonos!

5.1.5. Tétel. Legyen $D \subset \mathbb{R}$, $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ és $a \in D$. Ekkor a következő három állítás ekvivalens.

- $\lim_a f = f(a)$.
- f folytonos az a pontban.
- Ha $x_n \rightarrow a$ D -ben, akkor $f(x_n) \rightarrow f(a)$.

5.1.6. Definíció. Legyen $D \subset \mathbb{R}$. Azt mondjuk, hogy az $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ fv.

- *folytonos*, ha folytonos $\forall a \in D$ pontban.

- *Lipschitz-folytonos* (Lipschitzes), ha $\exists L \in \mathbb{R}$ (Lipschitz-állandó), hogy

$$|f(x) - f(y)| \leq L |x - y|$$

teljesül $\forall x, y \in D$ -re.

- *kontrakció*, ha $\exists q < 1$ (kontrakciós állandó), hogy

$$|f(x) - f(y)| \leq q |x - y|$$

teljesül $\forall x, y \in D$ -re.

Az Olvasó vizsgálja meg, hogy az alábbi függvények melyik tulajdonsággal rendelkeznek!

1. $f(x) = cx$, $c \in \mathbb{R}$ rögzített.
2. $g(x) = x^2$, ahol
 - (a) $D(g) = \mathbb{R}$.
 - (b) Változik-e valami, ha $D(g) = (-1, 1)$?
 - (c) Illetve, ha $D(g) = (-\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$?
3. $h(x) = e^x$, ahol
 - (a) $D(h) = \mathbb{R}$.
 - (b) Változik-e valami, ha $D(g) = (-\infty, 0]$?
4. $p(x) = \frac{1}{x}$, ahol
 - (a) $D(p) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
 - (b) Változik-e valami, ha $D(p) = [1, \infty]$?

5.1.7. Lemma. Legyen $D \subset \mathbb{R}$, $f : D \rightarrow \mathbb{R}$. Ekkor a 5.1.6. Definícióban szereplő fogalmak viszonya a következő. f kontrakció $\Rightarrow f$ Lipschitzes $\Rightarrow f$ folytonos.

5.1.8. Tétel. (Bolzano) Legyen $[a, b] \subset \mathbb{R}$ intervallum, illetve legyen $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos fv. melyre $f(a)f(b) < 0$. Ekkor $\exists \xi \in (a, b)$ melyre $f(\xi) = 0$.

Talán említeni sem kell, hogy milyen fontos ez a tétel! Triviálisnak is tűnik, de éppen ezért óvatossá kell lenni a bizonyításánál. A kulcs az intervallumfelezés (ez egy a gyakorlatban is alkalmazott módszer)! Megnézzük, hogy a felezőpontban milyen előjelű a függvény. Ha 0, akkor készen vagyunk, ha akár pozitív, akár negatív, akkor kapunk egy fele akkora intervallumot, melynek végpontjaira igaz a tétel feltevése. Ezt az eljárást ismételjük és a határértékben (az Olvasó igazolja, hogy a sorozat Cauchy-sorozat és így konvergens!) felvett függvényértékekről kell már csak megmutatni, hogy nem lehet más, mint 0. Ezt az Olvasóra bízunk.

5.1.9. Tétel. (Weierstrass) Legyen $D \subset \mathbb{R}$ nemüres korlátos és zárt halmaz, illetve legyen $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos fv. Ekkor f korlátos, továbbá van maximális, illetve minimális értéke.

Derivált.

5.1.10. Definíció. Legyen $D \subset \mathbb{R}$, $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ és legyen $a \in \text{int}D$. Azt mondjuk, hogy f differenciálható az a pontban, ha

$$\exists \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Ha létezik ez a határérték, akkor ezt az értéket $f'(a)$ -val jelöljük és az f deriváltja az a helyen megnevezést használjuk rá.

5.1.11. Lemma. Legyen $D \subset \mathbb{R}$, $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ és legyen $a \in \text{int}D$. Ha f differenciálható az a pontban, akkor ott folytonos is.

Középértéktételek.

5.1.12. Lemma. (Rolle) Legyen $f \in C[a, b] \cap D(a, b)$, $f(a) = f(b)$. Ekkor

$$\exists c \in (a, b) : f'(c) = 0.$$

Bizonyítás. Ha f konstans, akkor tetszőleges hely megfelelő. Ha nem, akkor belső pontban fogja felvenni a maximumát vagy minimumát Weierstrass tétele (5.1.9. Tétel) szerint. Ezen a helyen f deriváltja 0. $\square$

5.1.13. Lemma. (Cauchy) Legyen $f, g \in C[a, b] \cap D(a, b)$, $g'(x) \neq 0$. Ekkor $\exists c \in (a, b) :$

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

Bizonyítás. $g(b) - g(a) \neq 0$, különben Rolle tétele (5.1.12. Tétel) szerint $g'(c) = 0$ lenne valamely $c \in (a, b)$ helyen. Legyen $h = f - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g$. Ekkor $h(a) = h(b)$ és h -ra teljesülnek a Rolle tétel feltételei, tehát $\exists c \in (a, b) : h'(c) = 0$. $\square$

5.1.14. Lemma. (Lagrange) Legyen $f \in C[a, b] \cap D(a, b)$. Ekkor $\exists c \in (a, b) :$

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Bizonyítás. $g = x$ szereposztással alkalmazzuk a Cauchy-féle középértéktételt (5.1.13. Tétel). $\square$

5.1.15. Lemma. Legyen $f \in D(a, b)$. Ekkor a következő két állítás ekvivalens.

- $|f'| \leq L$.
- f Lipschitzes az L állandóval.

Bizonyítás. Csak az alapötleteket adjuk meg, ami alapján az Olvasó kidolgozhatja a bizonyítás részleteit.

- $\Rightarrow$: Lagrange-féle KÉT (5.1.14. Tétel).
- $\Leftarrow$: írjuk fel definíció alapján, aztán vegyünk határértéket.

$\square$

Taylor-sor.

5.1.16. Tétel. Legyen $f : B_r(a) \rightarrow \mathbb{R}$. Tfh. $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (x - a)^k \quad \forall x \in B_r(a)$. Ekkor $f \in D^{\infty}(B_r(a))$ és $c_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!}$.

A $B_r(a)$ jelölés az a elem r sugarú nyílt környezetét jelenti.

5.1.17. Tétel. Legyen $f \in C^n[a, b] \cap D^{n+1}(a, b)$, $p \in \mathbb{N}$. Ekkor $\exists c \in (a, b) :$

$$f(b) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (b - a)^k + \frac{f^{(n+1)}(c)}{n! p} (b - c)^{n+1-p} (b - a)^p,$$

speciálisan $p = n + 1$ választással

$$f(b) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (b - a)^k + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n + 1)!} (b - a)^{n+1}.$$

Bizonyítás. $\tilde{f}(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x)}{k!} (b-x)^k$, $\tilde{g}(x) = (b-x)^p$ szereposztással alkalmazzuk a Cauchy-féle KÉT-t (5.1.13. Tétel). $\square$

Az Olvasó igazolja az alábbi egyenlőségeket:

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}, \quad (5.1)$$

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}, \quad \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!},$$

$$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}, \quad \cos x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!},$$

$x \in \mathbb{R}$ esetében. Így már könnyű igazolni az úgynevezett *Euler-formulát*:

$$e^{it} = \cos t + i \sin t \quad (5.2)$$

Illetve, hogy

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}, \quad \cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}.$$

Ezek a formulák meg is magyarázzák a sh és ch elnevezéseket.

Nem minden függvénysor értelmes minden valós számra, ilyen a már középiskolából ismert mértani sor, illetve az ebből integrálással kapható függvénysor:

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k, \quad x \in (-1, 1),$$

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k}, \quad x \in (-1, 1].$$

5.2. Vektorterek, lineáris leképezések

Sík- és térvektorok már középiskolában hasznos segítséget nyújtottak különböző problémák kezelésében. Ezt a vektorfogalmat általánosítjuk, mégpedig egy matematikában megszokott módon, amit a későbbiekben is sokszor fogunk alkalmazni. Ez pedig a következő: összegyűjtjük a sík és térvektorok általunk

fontosnak gondolt tulajdonságait, majd felejtjük el, hogy mikről is készítettük ezt a listát és vizsgáljuk meg, hogy milyen objektumok rendelkeznek a lista tulajdonságaival! A sík és térvektorok biztos, de nemcsak ezek, mint látni fogjuk!

Azért érdemes így eljárunk, mert egyrészt általános állításokat igazolhatunk matematikailag korrekt módon, másrészt ezek az állítások nem csak a sík és térvektorokra lesznek igazak.

A vektorok két legfontosabb tulajdonsága, hogy összeadhatjuk őket, illetve megszorozhatjuk őket egy számmal. (Figyelem, vektort vektorral egyelőre nem szorzunk, mert egyelőre csak a legegyszerűbb tulajdonságokat listázzuk!) Erre a két műveletre az alábbi tulajdonságok tűnnek fontosnak és egyben egyszerűnek. Némelyik már túl egyszerűnek is tűnik, de ettől még nem hagyhatjuk ki őket, sőt!

5.2.1. Definíció. Legyen V egy halmaz és tekintsük a $+$: $V \times V \rightarrow V$ és $\cdot$: $\mathbb{R} \times V \rightarrow V$ (vagy $\cdot$: $\mathbb{C} \times V \rightarrow V$) műveleteket, melyekre teljesülnek a következők.

$$(1a) \quad x + y = y + x \quad \forall x, y \in V$$

$$(1b) \quad (x + y) + z = x + (y + z) \quad \forall x, y, z \in V$$

$$(1c) \quad \exists 0_V \in V : x + 0_V = x \quad \forall x \in V$$

$$(1d) \quad \forall x \in V \exists -x \in V : x + (-x) = 0_V \quad \forall x \in V$$

$$(2a) \quad \lambda \cdot (x + y) = (\lambda \cdot x) + (\lambda \cdot y) \quad \forall x, y \in V, \forall \lambda \in \mathbb{R} \text{ (vagy } \mathbb{C})$$

$$(2b) \quad (\lambda + \mu) \cdot x = (\lambda \cdot x) + (\mu \cdot x) \quad \forall x \in V, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R} \text{ (vagy } \mathbb{C})$$

$$(2c) \quad \lambda \cdot (\mu \cdot x) = (\lambda \cdot \mu) \cdot x \quad \forall x \in V, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R} \text{ (vagy } \mathbb{C})$$

$$(2d) \quad 1 \cdot x = x \quad \forall x \in V$$

Ekkor amh. V (a fenti műveletekkel) *vektortér* (VT) a $\mathbb{R}$ (vagy a $\mathbb{C}$) számtest felett.

Az Olvasó igazolja, hogy az alábbi halmazok vektorterek!

1. $\mathbb{R}^n$, ahol az összeadás koordinátánként működik, a skalárral szorzás pedig minden koordinátát szoroz.

2. Valós számsorozatok, ahol az összeadás elemenként működik, a skalárral szorzás pedig minden elemet szoroz.
3. Azon valós számsorozatok, melyre $x_{n+2} = x_{n+1} + x_n$ igaz. A műveletek ugyanúgy vannak értelmezve, mint az előző példában.
4. $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvények, ahol a szokásos az összeadás és skalárral való szorzás.
5. $P = \{\text{valós együtthatós polinomok}\}$, ahol a szokásos az összeadás és skalárral való szorzás.
6. $P_n = \{p \in P : \deg p \leq n, \text{ vagy } p \equiv 0\}$, ahol a $\deg$ a degree rövidítése, így a fokszámot jelöli. A műveletek ugyanúgy vannak értelmezve, mint az előző példában.
7. "Trükkös": $V = \mathbb{R}^+$ a valós számtest felett, de a műveletek furcsák: $u \oplus v = uv, \lambda \odot v = v^\lambda$.
8. Az $\ddot{y}(t) + p\dot{y}(t) + qy(t) = 0$ megoldásai.

5.2.2. Definíció. Amh. W *altere* a V VT-nek, ha $W \subset V$ és W VT a V -beli műveletekre nézve (ugyanazon számtest felett).

Mutassuk meg, hogy a $\{p \in P : \deg p = 2, \text{ vagy } p \equiv 0\}$ halmaz nem vektortér a polinomok szokásos műveleteivel!

5.2.3. Lemma. W *pontosan akkor altere* a V VT-nek, ha *zárt a műveletekre*.

Az OLvasó gondolja meg ennek az igazolását, egyrészt, mert fontos, másrészt, mert egyszerű.

5.2.4. Definíció. Legyen V VT $\mathbb{R}$ (vagy $\mathbb{C}$ felett). Azt mondjuk, hogy a $v_1, v_2, \dots, v_n \in V$ vektorok

- *lineárisan függetlenek* (F), ha $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_n v_n = 0_V \Rightarrow \lambda_i = 0 \forall i = 1, \dots, n$
- *lineárisan összefüggőek* (Ö), ha nem F
- *generátorrendszert alkotnak* (G), ha $\forall v \in V \exists \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ (vagy $\mathbb{C}$): $v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_n v_n$

- *bázist alkotnak* (B), ha F és G.

5.2.5. Lemma. Legyen V VT és legyen egy bázisának elemszáma n . Ekkor V minden bázisának elemszáma n .

5.2.6. Definíció. Legyen V VT. Azt mondjuk, hogy V *dimenziója* n jel: $\dim V = n$, ha egy bázisának elemszáma n . Ha V -nek nincs véges bázisa, akkor azt mondjuk, hogy V végtelen dimenziós.

Érdeemes visszatérni a kezdeti példához, ahol halmazokról kellett megmutatni, hogy vektorteret alkotnak. Melyik hány dimenziós?

5.2.7. Definíció. Legyen X, Y VT ugyanazon ($\mathbb{R}$ vagy $\mathbb{C}$) számtest felett. Amh. az $f : X \rightarrow Y$ függvény *lineáris leképezés*, ha teljesülnek a következők.

1. $f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2) \quad \forall x_1, x_2 \in X$
2. $f(\lambda \cdot x) = \lambda \cdot f(x) \quad \forall x \in X, \forall \lambda \in \mathbb{R} \text{ (vagy } \mathbb{C} \text{)}.$

Igazoljuk, hogy az alábbi leképezések lineárisak!

1. Mátrixszal való szorzás.
2. Konvergens sorozatok esetében a határérték vétele.
3. $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ differenciálható függvények differenciálása.
4. $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ integrálható függvények integrálása.

$$5. \mathcal{L}(f) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-st} dt$$

5.2.8. Definíció. Legyen X VT ($\mathbb{R}$ vagy $\mathbb{C}$) számtest felett, és D altere X -nek. Legyen $A : D \rightarrow X$ egy lineáris leképezés. Amh. $\lambda \in \mathbb{R}$ A -nak *sajátértéke*, ha $\exists v \neq 0_X \in D$, hogy $Av = \lambda v$. Ekkor amh. v A -nak a λ sajátértékhez tartozó *sajátvektora*.

5.2.9. Példa. Legyen $X = \{u \in C[0, \pi] : u(0) = u(\pi) = 0\}$, $D = \{u \in C^2(0, \pi) \cap C[0, \pi] : u(0) = u(\pi) = 0\}$ és tekintsük a D -n következőképpen értelmezett operátort $Au = -u''$! Határozzuk meg A sajátértékeit és sajátfüggvényeit!

Azon $u(x)$ függvényeket keressük, melyekre

$$\begin{cases} -u''(x) = \lambda u(x) \\ u(0) = u(\pi) = 0. \end{cases} \quad (5.3)$$

A karakterisztikus egyenlet

$$\mu^2 + \lambda = 0,$$

vagyis $\mu = \pm\sqrt{-\lambda}$. Érdemes λ előjele szerint eseteket megkülönböztetni:

1. Ha $\lambda = 0$, akkor $u(x) = Ax + B$, majd a peremfeltételeket figyelembe véve adódik, hogy $u(x) \equiv 0$, ami nem sajátfüggvény. Tehát ebből az ágból nem kapunk sajátérték-sajátfüggvény párt.
2. Ha $\lambda < 0$, akkor $u(x) = Ae^{\sqrt{-\lambda}x} + Be^{-\sqrt{-\lambda}x}$, majd a peremfeltételeket figyelembe véve adódik, hogy $u(x) \equiv 0$, ami nem sajátfüggvény. Tehát ebből az ágból sem kapunk sajátérték-sajátfüggvény párt.
3. Ha $\lambda > 0$, akkor $u(x) = A \cos \sqrt{\lambda}x + B \sin \sqrt{\lambda}x$, majd a peremfeltételeket figyelembe véve adódik, hogy

$$u_n(x) = \sin nx,$$

a hozzá tartozó sajátérték pedig

$$\lambda_n = n^2.$$

Vegyük észre, hogy végtelen sok sajátérték-sajátfüggvény párt találtunk!

Irodalomjegyzék

- [AP98] Ascher, U.M., Petzold L.R.: Computer Methods for Ordinary Differential Equations and Differential-Algebraic Equations. SIAM (1998)
- [BDH12] Blanchard, P., Devaney R.L., Hall G.R.: Differential Equations. Brooks/Cole, Cengage Learning (2012)
- [BDM17] Boyce, W.E., DiPrima R.C., Meade D.B.: Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems. Wiley (2017)
- [HSD04] Hirsch, M.W., Smale S., Devaney R.L.: Differential Equations, Dynamical Systems, and an Introduction to Chaos. Elsevier (2004)
- [MHH13] Mincsoyics, M.E., Havasi, Á., Haszpra, T.: Matematika példatár földtudomány szakosoknak. ELTE, Budapest (2013)
<http://elte.prompt.hu/sites/default/files/tananyagok/matpeldatar/Mat34TMTmem.pdf>
Nincs meg a link!!!
- [S01] Scharnitzky, V.: Differenciálegyenletek példatár. Bolyai-sorozat (2001)
- [TS09] Simon L.P., Tóth, J.: Differenciálegyenletek bevezetés az elméletbe és az alkalmazásokba. Typotex (2009)
- [S94] Strogatz, S.H.: Nonlinear Dynamics and Chaos. Perseus Book Publishing (1994)
- [TBD18] Trefethen, L.N., Birkisson, Á., Driscoll, T.A., : Exploring ODEs. SIAM (2018)