

Elmélet

2021. 01. 20.

1. Feladat (10 pont). *Mondja ki a következő tételeket és definíciókat:*

- *Picard-féle integrálegyenlet*
- *Tétel a folytonos függésről*
- *Aszimptotikusan stabil egyensúlyi pont definíciója*
- *Ljapunov instabilitási tétel*
- *Laplace-transzformált*

2. Feladat (10 pont). *Mondja ki és bizonyítsa be a Picard–Lindelöf-tétel globális változatát (a felhasznált részállítások közül egyet kell bizonyítani, a többi elég kimondani).*

3. Feladat (± 10 pont). *Igazak-e az alábbi állítások? (A választ nem kell indokolni.)*

- *Egy explicit Bernoulli-féle differenciálegyenlet jobb oldalához egy konstans adva Riccati-féle differenciálegyenletet kapunk.*
- *Egy folytonos jobb oldalú explicit elsőrendű differenciálegyenletre vonatkozó kezdetiérték-probléma maximális megoldása csak akkor lehet korlátos, ha a jobb oldal értelmezési tartománya korlátos.*
- *Ha $\det(\mathbf{A}) \neq 0$, akkor az $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}^2 \mathbf{x}$ differenciálegyenlet-rendszer origója instabil.*
- *Ha a p egyensúlyi helyzet egy U környezetében megadható olyan folytonosan differenciálható $V : U \rightarrow \mathbb{R}$ függvény, hogy minden $p \neq q \in U$ -ra $V'(q)f(q) \geq 0$ és $V(p) > V(q)$, akkor a p egyensúlyi helyzet stabil.*
- *Ha $|f(t)| \leq Me^{at}$ valamilyen $a > 0$ és $M > 0$ állandókkal, akkor $\Re s > a$ -ra f Laplace-integrálja abszolút konvergens.*

Feladatok

2021. 01. 20.

4. Feladat (11p). *Oldjuk meg a következő differenciálegyenletet:*

$$r^2 u''(r) + 5ru'(r) + 4u(r) = \frac{4}{r^3}.$$

Ezután írjunk fel olyan másodrendű Euler-egyenletet, amelynek $u(r) = cr^2 + 1$ megoldása.

5. Feladat (3p). *Aszimptotikusan stabil-e az $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ differenciálegyenlet-rendszer origója, ha az \mathbf{A} mátrix karakterisztikus polinomja $-\lambda^3 - 2\lambda^2 - 5\lambda - 11$?*

6. Feladat (16p). *Határozzuk meg az origó típusát az a paraméter függvényében (amennyiben a jobb oldal mátrixának determinánsa nem nulla):*

$$\dot{x} = ax - 4y,$$

$$\dot{y} = x + 2y.$$

Rajzoljuk fel a fázisképet $a = 6$ és $a = -6$ esetén is!