Differenciálegyenletek gyakorló feladatok

1. Szétválasztható DE

$$
\begin{aligned}
xy + y\ln(y)y' &= 0 \\
x^4y' &= y^3 \\
x^2y^2y' + 1 &= y \quad y(1) = 2 \\
y'\cot x + y &= 2 \quad y(0) = -1
\end{aligned}
$$

2. Lineáris DE

Oldjuk meg az alábbi lineáris differenciálegyenleteket, majd keressük meg a kezdetiérték-feladat megoldását szukcesszív approximációval.

$$
\begin{aligned}
y' &= 2y + x + 1 \quad y(0) = -2 \\
y' &= x - y \quad y(0) = 1 \\
y + y' + 1 &= x^3 \quad y(0) = 2 \\
y' + 4y &= 2 \quad y(0) = -1
\end{aligned}
$$

Oldjuk meg az alábbi kezdetiérték-feladatokat, majd ellenőrizzük az eredményt Taylor-sor módszerrel vagy határozatlan együtthatók módszerével.

$$
\begin{aligned}
y' &= 2y + x \quad y(1) = 2 \\
y' &= x - y + 3 \quad y(-1) = 2 \\
y' + 1 &= y + x^3 \quad y(1) = 2 \\
y' + 4y &= 2 \quad y(2) = -1
\end{aligned}
$$

3. Egzakt és egzaktra visszavezethető (multiplikátoros) DE

Vizsgáljuk meg, hogy az alábbi egyenletek egzaktak-e. Ha nem, keressünk multiplikátort (integráló tényezőt). Írjuk fel az általános megoldást.

$$\begin{aligned}
(2x+3x^2y)\ \mathrm{d}x+(x^3-3y^2)\ \mathrm{d}y&=0\\
3\cos(3x-y)\ \mathrm{d}x-\cos(3x-y)\ \mathrm{d}y&=0\\
y\ \mathrm{d}x+(xy^3+x\ln x)\ \mathrm{d}y&=0 \quad z=x\\
xy+y\ln yy'&=0\\
\frac{y}{x^2+y^2}\ \mathrm{d}x-\frac{x}{x^2+y^2}\ \mathrm{d}y&=0\\
(\frac{1}{3}xy+y^4)\ \mathrm{d}x+(x^2-xy^3)\ \mathrm{d}y&=0 \quad z=xy\\
2x\ \mathrm{d}x+(x-y)\ \mathrm{d}y&=0 \quad z=x+y
\end{aligned}$$

4. Homogén fokszámú és homogén fokszámúra visszavezethető DE

$$\begin{gathered}
2x\ \mathrm{d}y+(x^2y^4+1)y\ \mathrm{d}x=0\\
y+(2xy+1)y'=0
\end{gathered}$$

5. inverz függvényre felírt DE

$$(\sin^2 y+x\operatorname{ctg} y)y'=1$$

6. Bernoulli-féle DE

$$5(1+x^2)y' = 2xy + \frac{(1+x^2)^2}{y^4}$$
$$y' = y^4 \cos x + y \operatorname{tg} x$$

7. Riccati-féle DE

$$y' + y^2 = \frac{2}{x^2}$$
$$x^3y' + x^2y - y^2 = 2x^4$$
$$y' = (y-x)^2 + 1$$
$$y' = 2\frac{y}{x} + y^2 - x^2$$
$$y' = -\frac{4}{x^2} - \frac{1}{x}y + y^2$$

8. Euler-módszer

Közelítsük állandó $h = \frac{1}{2}$ lépésközű explicit és implicit Euler-módszerrel is az

$$\left.\begin{array}{r} y' = -4y \\ y(-1) = 2 \end{array}\right\}$$

kezdetiérték-probléma megoldásának $x = 2$-beli értékét. A kapott két értéket és a pontos megoldás értékét rendezzük nagyság szerinti sorrendbe!

9. Vegyes feladatok

$$
\begin{aligned}
(1+2y)\ \mathrm{d}x+(4-x^2)\ \mathrm{d}y&=0\\
(xy'-1)\ln x&=2y\\
xy'+(x+1)y&=3x^2e^{-x}\\
x^2y'-\cos 2y&=1, \quad y(+\infty)=\frac{9}{4}\pi\\
(2x^2-y^3)\ \mathrm{d}x-3xy^2(1+\ln x)\ \mathrm{d}y&=0
\end{aligned}
$$

10. hiányos másodrendű DE

$$
\begin{aligned}
y''=e^y,\ y(0)=y'(0)&=1\\
y''+y'^2&=2e^{-y}
\end{aligned}
$$

11. másodrendű homogén lineáris DE

Oldjuk meg az alábbi homogén állandó együtthatós másodrendű differenciálegyenleteket, majd közelítsük harmadfokú polinommal az $y(0)=y'(0)=1$ kezdeti feltételhez tartozó megoldást!

$$
\begin{aligned}
y''+6y'+6y&=0\\
y''+6y'+7y&=0\\
y''+4y'+7y&=0
\end{aligned}
$$

Írjunk fel olyan másodrendű lineáris differenciálegyenletet, amelynek megoldása $e^{2x}\sin\sqrt{3}x$, majd adjuk meg az összes megoldást!
****

12. Másodrendű lineáris DE

Oldjuk meg a homogén állandó együtthatós másodrendű differenciálegyenletet kétféleképpen, majd írjuk át rendszerré, és hasonlítsuk össze a kapott megoldásokat.

$$\begin{aligned}
y'' - 6y' + 13y &= 5e^{4x} \\
y'' - 6y' + 13y &= 5e^{4x}\cos 2x \\
y'' - 6y' + 13y &= 5e^{3x} \\
y'' - 6y' + 13y &= 5e^{3x}\cos 2x
\end{aligned}$$

13. Lineáris differenciálegyenlet-rendszer

Keressük meg az alábbi lineáris differenciálegyenlet-rendszerek megoldását:

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= 6x + 3y + e^{t}, \\
\dot{y} &= 4x + y + e^{2t}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= 6x + 3y - e^{t}, \\
\dot{y} &= 4x + y + 4e^{2t}.
\end{aligned}$$

14. Polárkoordináták

További feladatok itt: 18.2.7, 19.3.4, 20.2.8,18 és itt: 8.241-244.

15. Iránymező, 1D fázikép

$$
\begin{aligned}
y' &= x+y \\
y' &= -y^2 \\
y' &= x^2+y^2-1 \\
y' &= (y-3)(y-1)(y+1) \\
y' &= \cos y \\
y' &= \cot \frac{y}{2}.
\end{aligned}
$$

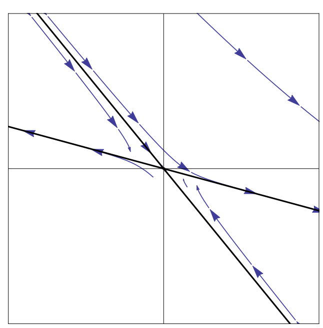
További feladatok itt: 18.2.1-3, 18.3.1-3.

16. 2D Lineáris rendszerek és fázisképek

16.1. Feladat. *Oldjuk meg az alábbi differenciálegyenlet-rendszert, és rajzoljuk fel a fázisképet:*

$$
\begin{aligned}
\dot{x} &= 3x+6y, \\
\dot{y} &= -2x-6y.
\end{aligned}
$$

Megoldás. A sajátértékek: $-\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{33}}{2}$ és $\frac{\sqrt{33}}{2}-\frac{3}{2}$, tehát az origó nyereg. A



1. ábra. Nyereg

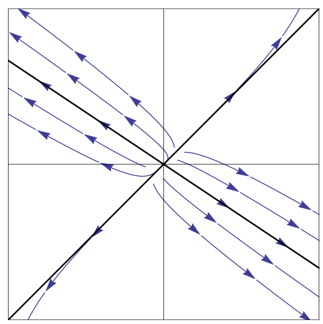
sajátvektorok: $(\frac{\sqrt{33}}{4}-\frac{9}{4},1)$ és $(-\frac{9}{4}-\frac{\sqrt{33}}{4},1)$, tehát a megoldás:

$$
c_1 e^{\left(-\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{33}}{2}\right)t} \begin{pmatrix} -\frac{9}{4}+\frac{\sqrt{33}}{4} \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{\left(\frac{\sqrt{33}}{2}-\frac{3}{2}\right)t} \begin{pmatrix} -\frac{9}{4}-\frac{\sqrt{33}}{4} \\ 1 \end{pmatrix}.
$$

16.2. Feladat. *Oldjuk meg az alábbi differenciálegyenlet-rendszert, és rajzoljuk fel a fázisképet:*

$$\dot{x} = 9x - 6y,$$
$$\dot{y} = -4x + 7y.$$

Megoldás. A sajátértékek: 13 és 3, tehát az origó instabil csomó. A saját-



2. ábra. Instabil csomó

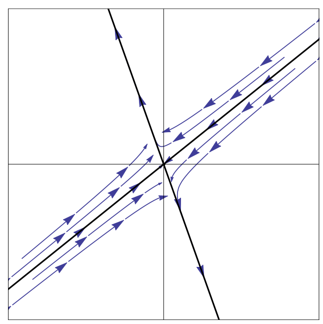
vektorok: $(-3,2)$ és $(1,1)$, tehát a megoldás:

$$c_1 e^{13t} \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} + c_2 e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

16.3. Feladat. *Oldjuk meg az alábbi differenciálegyenlet-rendszert, és rajzoljuk fel a fázisképet:*

$$\dot{x} = -9x - 4y,$$
$$\dot{y} = -9x - y.$$

<u>Megoldás.</u> A sajátértékek: $-5-2\sqrt{13}$ és $2\sqrt{13}-5$, tehát az origó nyereg. A



3. ábra. Nyereg

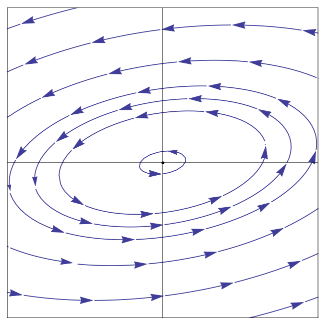
sajátvektorok: $(\frac{4}{9}+\frac{2\sqrt{13}}{9},1)$ és $(\frac{4}{9}-\frac{2\sqrt{13}}{9},1)$, tehát a megoldás:

$$c_1 e^{\left(-5-2\sqrt{13}\right)t} \begin{pmatrix} \frac{4}{9}+\frac{2\sqrt{13}}{9} \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{\left(2\sqrt{13}-5\right)t} \begin{pmatrix} \frac{4}{9}-\frac{2\sqrt{13}}{9} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

16.4. Feladat. *Oldjuk meg az alábbi differenciálegyenlet-rendszert, és rajzoljuk fel a fázisképet:*

$$\dot{x} = x - 8y,$$
$$\dot{y} = 2x - y.$$

Megoldás. A sajátértékek: $i\sqrt{15}$ és $-i\sqrt{15}$, tehát az origó centrum. A sa-



4. ábra. Centrum

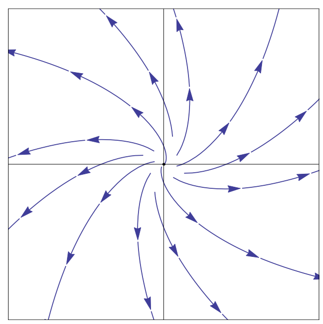
játvektorok: $(\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{15}}{2},1)$ és $(\frac{1}{2}-\frac{i\sqrt{15}}{2},1)$, tehát a megoldás:

$$c_1 e^{i\sqrt{15}t}\begin{pmatrix} \frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{15}}{2} \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{-i\sqrt{15}t}\begin{pmatrix} \frac{1}{2}-\frac{i\sqrt{15}}{2} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

16.5. Feladat. *Oldjuk meg az alábbi differenciálegyenlet-rendszert, és rajzoljuk fel a fázisképet:*

$$\dot{x} = 5x - 2y,$$
$$\dot{y} = 2x + 5y.$$

Megoldás. A sajátértékek: $5+2i$ és $5-2i$, tehát az origó instabil fókusz. A



5. ábra. Instabil fókusz

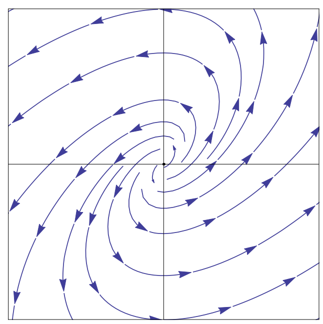
sajátvektorok: $(i,1)$ és $(-i,1)$, tehát a megoldás:

$$c_1 e^{(5+2i)t} \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{(5-2i)t} \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix}.$$

16.6. Feladat. *Oldjuk meg az alábbi differenciálegyenlet-rendszert, és rajzoljuk fel a fázisképet:*

$$\dot{x} = 9x - 8y,$$
$$\dot{y} = 9x.$$

Megoldás. A sajátértékek: $\frac{9}{2} + \frac{3i\sqrt{23}}{2}$ és $\frac{9}{2} - \frac{3i\sqrt{23}}{2}$, tehát az origó instabil fó-



6. ábra. Instabil fókusz

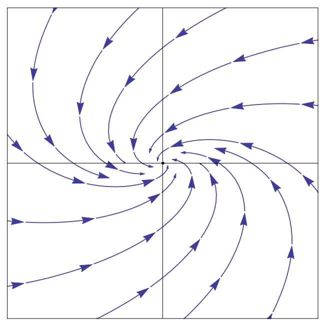
kusz. A sajátvektorok: $(\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{23}}{6}, 1)$ és $(\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{23}}{6}, 1)$, tehát a megoldás:

$$c_1 e^{\left(\frac{9}{2} + \frac{3i\sqrt{23}}{2}\right)t} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{23}}{6} \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{\left(\frac{9}{2} - \frac{3i\sqrt{23}}{2}\right)t} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{23}}{6} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

16.7. Feladat. *Oldjuk meg az alábbi differenciálegyenlet-rendszert, és rajzoljuk fel a fázisképet:*

$$\dot{x} = -3x - 5y,$$
$$\dot{y} = 2x - 4y.$$

<u>Megoldás.</u> A sajátértékek: $-\frac{7}{2} + \frac{i\sqrt{39}}{2}$ és $-\frac{7}{2} - \frac{i\sqrt{39}}{2}$, tehát az origó stabil fó-



7. ábra. Stabil fókusz

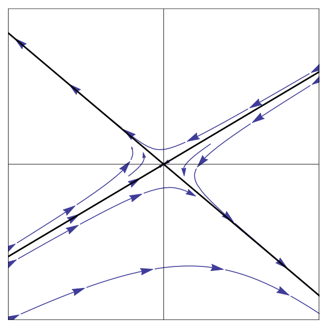
kusz. A sajátvektorok: $(\frac{1}{4} + \frac{i\sqrt{39}}{4}, 1)$ és $(\frac{1}{4} - \frac{i\sqrt{39}}{4}, 1)$, tehát a megoldás:

$$c_1 e^{\left(-\frac{7}{2} + \frac{i\sqrt{39}}{2}\right)t} \begin{pmatrix} \frac{1}{4} + \frac{i\sqrt{39}}{4} \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{\left(-\frac{7}{2} - \frac{i\sqrt{39}}{2}\right)t} \begin{pmatrix} \frac{1}{4} - \frac{i\sqrt{39}}{4} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

16.8. Feladat. *Oldjuk meg az alábbi differenciálegyenlet-rendszert, és rajzoljuk fel a fázisképet:*

$$\dot{x} = -3x - 8y,$$
$$\dot{y} = -4x - y.$$

<u>Megoldás.</u> A sajátértékek: $-2-\sqrt{33}$ és $\sqrt{33}-2$, tehát az origó nyereg. A



8. ábra. Nyereg

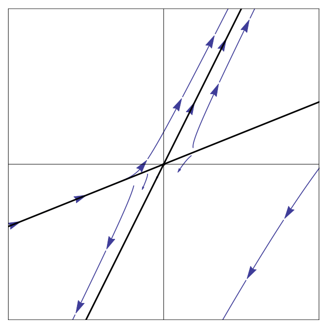
sajátvektorok: $(\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{33}}{4},1)$ és $(\frac{1}{4}-\frac{\sqrt{33}}{4},1)$, tehát a megoldás:

$$c_1 e^{\left(-2-\sqrt{33}\right)t} \begin{pmatrix} \frac{1}{4}+\frac{\sqrt{33}}{4} \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{\left(\sqrt{33}-2\right)t} \begin{pmatrix} \frac{1}{4}-\frac{\sqrt{33}}{4} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

16.9. Feladat. *Oldjuk meg az alábbi differenciálegyenlet-rendszert, és rajzoljuk fel a fázisképet:*

$$\dot{x} = -3x + 5y,$$
$$\dot{y} = -4x + 9y.$$

Megoldás. A sajátértékek: 7 és -1, tehát az origó nyereg. A sajátvektorok:



9. ábra. Nyereg

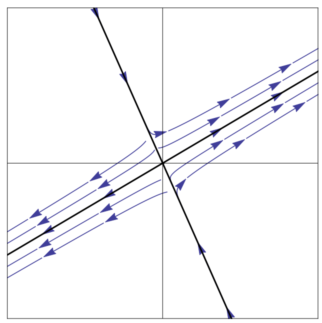
(1,2) és (5,2), tehát a megoldás:

$$c_1 e^{7t} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + c_2 e^{-t} \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

16.10. Feladat. *Oldjuk meg az alábbi differenciálegyenlet-rendszert, és rajzoljuk fel a fázisképet:*

$$\dot{x} = 6x + 3y,$$
$$\dot{y} = 4x + y.$$

Megoldás. A sajátértékek: $\frac{7}{2} + \frac{\sqrt{73}}{2}$ és $\frac{7}{2} - \frac{\sqrt{73}}{2}$, tehát az origó nyereg. A sa-



10. ábra. Nyereg

játvektorok: $(\frac{5}{8} + \frac{\sqrt{73}}{8}, 1)$ és $(\frac{5}{8} - \frac{\sqrt{73}}{8}, 1)$, tehát a megoldás:

$$c_1 e^{\left(\frac{7}{2} + \frac{\sqrt{73}}{2}\right)t} \begin{pmatrix} \frac{5}{8} + \frac{\sqrt{73}}{8} \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{\left(\frac{7}{2} - \frac{\sqrt{73}}{2}\right)t} \begin{pmatrix} \frac{5}{8} - \frac{\sqrt{73}}{8} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

További feladatok: itt: 4.93-98, 7.156-181, itt: 18.2.4-7, 18.3.4-6, és itt: 20.2.1-3, 20.3.1-4.

17. Stabilitásvizsgálat linearizálással

További feladatok: Filippov 791-, illetve itt: 19.2.1-3, 19.3.1-4, 20.2.4-6,9-11 és itt: 8.188-222.

18. Stabilitásvizsgálat Ljapunov-függvénnyel

További feladatok itt: 19.2.4-7, 19.3.5-7

19. Laplace

További feladatok itt: 6.141-155.