1. gyakorlat - Végtelen sorok

2022. március 31.

1. Határozza meg az alábbi végtelen sorok összegét!

   (a)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{2n} - e^{n}}{e^{3n}} = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n} - \sum_{n=1}^{\infty} e^{-2n} = \frac{e^{-1}}{1 - e^{-1}} - \frac{e^{-2}}{1 - e^{-2}} = \frac{1}{e-1} - \frac{1}{e^2 - 1} = \frac{e}{e^2 - 1}$$

   (b)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n + 5^n}{6^n} = \frac{1}{6} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4}{5}\right)^n + \frac{1}{6} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{5}{6}\right)^n = \frac{4}{6} + \frac{5}{6} = \frac{3}{2}$$

   (c)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2 - 1} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n+1} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + ...\right) = \frac{1}{2}$$

   Az (a) és (b) feladatban a geometriai sor összegképletét kellett használni, míg a (c) részben előbb parciális törtekre bontottunk, majd kihasználtuk az így kapott összeg teleszkópikus voltát.

2. Állapítsuk meg a gyök és hányadoskritériumot használva, hogy az alábbi sorok közül melyek konvergensek és melyek divergensek!

   (a)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n2^n}{3^n}$$

   A konvergencia eldöntésére hányadoskritériumot használunk.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)2^{n+1}3^n}{3^{n+1}n2^n} \to \frac{2}{3}$$

   A kapott hányados értéke 1-től kisebb, tehát a végtelen sorunk konvergens.

   (b)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2009^n}{n^{2009}}$$

A konvergencia eldöntésére gyökkritériumot használunk.

$$\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\frac{2009^n}{n^{2009}}} = \frac{2009}{\sqrt[n]{n^{2009}}} \to 2009$$

A kapott n-dik gyök értéke 1-től nagyobb, tehát a végtelen sorunk divergens.

(c)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{3}{n}\right)^{n^2}$$

A konvergencia eldöntésére gyökkritériumot használunk.

$$\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\left(1 - \frac{3}{n}\right)^{n^2}} = \left(1 - \frac{3}{n}\right)^n \to e^{-3}$$

A kapott n-dik gyök értéke 1-től kisebb, tehát a végtelen sorunk konvergens.

(d)

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2^n + 6^n}{3^n + 7^n}$$

A konvergencia eldöntésére gyökkritériumot használunk, de előbb egy becslést hajtunk végre a könnyebb számoláshoz.

$$\frac{2^n + 6^n}{3^n + 7^n} \leq \frac{6^n + 6^n}{7^n}$$

$$\sqrt[n]{b_n} = \sqrt[n]{2\left(\frac{6}{7}\right)^n} = \sqrt[n]{2}\frac{6}{7} \to \frac{6}{7}$$

A kapott n-dik gyök értéke 1-től kisebb, tehát sorunkat sikerült felülről becsülni egy konvergens sorral, tehát a majoráns kritérium alapján az eredeti sorunk is konvergens.

(e)

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$$

A konvergencia eldöntésére hányadoskritériumot használunk.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2^{n+1} n!}{(n+1)! 2^n} = \frac{2}{n+1} \to 0$$

A kapott hányados gyök értéke 1-től kisebb, tehát a végtelen sorunk konvergens.

(f)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$$

A konvergencia eldöntésére hányadoskritériumot használunk.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)!n^n}{(n+1)^{n+1}n!} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \to e^{-1}$$

A kapott hányados gyök értéke 1-től kisebb, tehát a végtelen sorunk konvergens.

3. Mely "a" esetén konvergens a következő sor?

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a}{n+2} - \frac{1}{n+4}\right)$$

4. Az alább megadott végtelen sorok közül melyek konvergensek, és melyek divergensek?

(a)

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{1+n^2}$$

A konvergencia eldöntésére majoráns kritériumot használunk.

$$\frac{1}{1+n^2} \leq \frac{1}{n^2}$$

Azt pedig tudjuk, hogy a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ sor konvergens, így a majoránskritérium alapján az eredeti sor is konvergens.

(b)

$$\sum_{n=2} \frac{1}{n \ln n}$$

A konvergencia eldöntésére integrálkritériumot használunk. Minden $x \geq 2$ esetén az $f(x) = \frac{1}{x \ln x}$ függvény pozitív és szigorúan monoton csökkenő.

$$\int_2^{\infty} \frac{1}{x \ln x} \mathrm{d}x = [\ln \ln x]_2^{\infty} = \infty$$

A sor tehát az integrálkritérium alapján divergens.

(c)

$$\sum_{n=2} \frac{1}{n(\ln n)^2}$$

A konvergencia eldöntésére integrálkritériumot használunk. Minden $x \geq 2$ esetén az $f(x) = \frac{1}{x(\ln x)^2}$ függvény pozitív és szigorúan monoton csökkenő (ez egyszerű deriválással látható).

$$\int_2^\infty \frac{1}{x(\ln x)^2} \mathrm{d}x = [-(\ln x)^{-1}]_2^\infty \neq \infty$$

A sor tehát az integrálkritérium alapján konvergens.

(d)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1}$$

A konvergencia eldöntésére minoráns kritériumot használunk.

$$\frac{1}{2n-1} \geq \frac{1}{n}$$

Azt pedig tudjuk, hogy a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ sor divergens, így a minoráns kritérium alapján az eredeti sor is divergens.

(e)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 2n + 4}$$

A konvergencia eldöntésére majoráns kritériumot használunk.

$$\frac{1}{n^2 + 2n + 4} \leq \frac{1}{n^2 + 2n^2 + 4n^2}$$

Azt pedig tudjuk, hogy a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{7n^2}$ sor konvergens, így a majoránskritérium alapján az eredeti sor is konvergens.

(f)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3 - 4}$$

A konvergencia eldöntésére majoráns kritériumot használunk.

$$\frac{1}{n^3 - 4} \leq \frac{1}{n^3 - 4n^3}$$

Azt pedig tudjuk, hogy a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{-1}{3n^3}$ sor konvergens, így a majoránskritérium alapján az eredeti sor is konvergens.

(g)

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n2^n}$$

A konvergencia eldöntésére gyökkritériumot használunk.

$$\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\frac{1}{n2^n}} \to \frac{1}{2}$$

A kapott n-dik gyök értéke 1-től kisebb, tehát a gyökkritérium alapján az eredeti sor konvergens.

(h)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$$

A feladat megoldása kétféle módon történhet. A konvergencia eldöntésére minoráns kritériumot használunk.

$$\frac{\ln n}{n} \geq \frac{1}{n}$$

Azt pedig tudjuk, hogy a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ sor divergens, így a minoránskritérium alapján az eredeti sor is divergens.
VAGY A konvergencia eldöntésére integrálkritériumot használunk. Minden $x \geq 2$ esetén az $f(x) = \frac{ln x}{x}$ függvény pozitív és szigorúan monoton csökkenő (ez egyszerű deriválással látható).

$$\int_{2}^{\infty} \frac{\ln x}{x} \mathrm{d}x = [\frac{\ln x^2}{2}]_2^{\infty} = \infty$$

A sor tehát az integrálkritérium alapján divergens.

(i)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{\ln n}$$

A konvergencia eldöntésére minoráns kritériumot használunk.

$$\frac{\sqrt{n}}{\ln n} \geq \frac{1}{\ln n} \geq \frac{1}{n}$$

Azt pedig tudjuk, hogy a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ sor divergens, így a minoránskritérium alapján az eredeti sor is divergens.

(j)

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$$

Ez a sor Leibniz típusú, hisz az általános tag abszolút értékben monoton csökkenőleg tart a 0-hoz. Így a megfelelő tétel alapján a fenti sor konvergens.

(k)

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n+1}{n+2}$$

A sor nem Leibniz típusú, ugyanis az általános tag abszolút értékben nem tart monoton csökkenőleg a 0-hoz.

$$|a_n| \to 1$$

Azaz nem teljesül a konvergencia szükséges feltétele, így az eredeti sor divergens.

(l)

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$$

Gyöktelenítéssel a sor a következő alakra hozható:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$$

Ez pedig már egy Leibniz típusú sor, ugyanis az általános ag abszolút értékben monton csökkenőleg tart a 1-hoz. Így a megfelelő tétel alapján a so konvergens.

5. Az alábbi sorok közül melyek az abszolút konvergensek, feltételesen konvergensek, illetve divergensek?

(a)

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}0.1^n$$

Ez a sor Leibniz típusú, ugyanis az általános tag abszolút értékben monoton csökkenőleg tart a 0-hoz. Így a megfelelő tétel alapján a fenti sor konvergens. Ha abszolút konvergenciát vizsgálunk, akkor egy 1-től kisebb hányadosú geometriai sort kapunk, ami szintén konvergenes. Így a feladatbeli sor abszolút konvergens.

(b)

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{3}{5+n}$$

Ez a sor is Leibniz típusú, hisz az általános tag abszolút értékben monoton csökkenőleg tart a 0-hoz. Így a megfelelő tétel alapján a fenti sor konvergens. Ha abszolút konvergenciát vizsgálunk, akkor a $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{2n}$ sorral minorálható a sorunk. Így a feladatbeli sor nem abszolüt, csak feltételesen konvergens.

(c)

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n^2+4}$$

Ez a sor is Leibniz típusú, hisz az általános tag abszolút értékben monoton csökkenőleg tart a 0-hoz. Így a megfelelő tétel alapján a fenti sor konvergens. Ha abszolút konvergenciát vizsgálunk, akkor a $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ sorral majorálhaó a sorunk. Így a feladatbeli sor abszolút konvergens.