Matematika A2

7. gyakorlat megoldása

1. Keressük meg a megadott mátrix **(i)** sorainak egy bázisát, **(ii)** oszlopainak egy bázisát, **(iii)** és határozzuk meg a mátrix rangját!

   (a) $\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -6 \end{bmatrix}$ A feladat megoldásához Gauss-eliminációt végzünk. Ugynais ennek segítségével megadható az oszlopoknak, a soroknak egy bázisa és a mátrix rangja egyaránt. A Gauss-elimináció során csak a megengedett sorműveleteket végezzük.

   $$\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -6 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

   A második sor csupa 0-ból áll, így a sorok és oszlopok bázisa 1 dimenziós lesz, és a mátrix rangja is 1 lesz. (Rang= lineárisan független oszlopok száma= lineárisan független sorok száma= legnagyobb nem 0 aldeterminánsmérete).
   A sorok bázisa: $(1, -3)$.
   Az oszlopok bázisa: $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.
   A mátrix rangja: 1.

   (b) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$
   A feladat megoldásához Gauss-eliminációt végzünk. Ugynais ennek segítségével megadható az oszlopoknak, a soroknak egy bázisa és a mátrix rangja egyaránt. A Gauss-elimináció során csak a megengedett sorműveleteket végezzük.

   $$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{bmatrix} \sim \ldots \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

   Mivel nincs a mátrixnak csupa 0 sora, így a sorok és oszlopok bázisa 3 dimenziós lesz, emellett a mátris rangja is 3.
   A sorok bázisa: $(1, 1, 2, 1), (1, 0, 1, 2), (2, 1, 3, 4)$.
   Az oszlopok bázisa: $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$.
   A mátrix rangja: 3.

   (c) $\begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 6 & 0 & -2 \\ 2 & -3 & -2 & 4 & 4 \\ 3 & -3 & 6 & 6 & 3 \\ 5 & -3 & 10 & 10 & 5 \end{bmatrix}$
   A feladat megoldásához Gauss-eliminációt végzünk. Ugynais ennek segítségével megadható az oszlopoknak, a soroknak egy bázisa és a mátrix rangja egyaránt. A Gauss-elimináció során csak a megengedett sorműveleteket végezzük.

   $$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 6 & 0 & -2 \\ 2 & -3 & -2 & 4 & 4 \\ 3 & -3 & 6 & 6 & 3 \\ 5 & -3 & 10 & 10 & 5 \end{bmatrix} \sim \ldots \sim \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 6 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -12 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

A kapott mátrixnak van 2 csupa 0 sora, így a sorok és oszlopok bázisa 3 dimeniós lesz, emellett a mátrix rangja is 3.
A sorok bázisa: $(1,-3,2,2,1),(0,3,6,0,-2),(2,-3,-2,4,4)$.
Az oszlopok bázisa: $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ -3 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ -2 \\ 6 \\ 10 \end{pmatrix}$.
A mátrix rangja:3.

2. Keressünk egy olyan részhalmazát az alábbi vektoroknak, amely az öt vektor által kifeszített tér egy bázisát alkotja! Minden vektort írjuk fel a kapott bázis elemienek lineáris kombinációjaként! $\mathbf{v}_1 = (1,2,0,3)$, $\mathbf{v}_2 = (2,-5,-3,6)$, $\mathbf{v}_3 = (0,1,3,0)$, $\mathbf{v}_4 = (2,-1,4,-7)$, $\mathbf{v}_5 = (5,-8,1,2)$.
Ezt a feladatot is az előzőhöz hasonlóan Gauss-eliminációval kell megoldanunk. És az így kapott alakból mér egyszerűen meg tudjuk majd adni a bázist.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & -5 & -3 & 6 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & 4 & -7 \\ 5 & -8 & 1 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & -9 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{8}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -13 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Látható tehát, hogy ennek a mátrixnak 4 független sora van, azaz az öt vektor egy négydimenziós teret feszít ki. Tehát a v_1, v_2, v_3, v_4 vektor bázist alkot ebben a térben. De természetesen nem csak ez a vektornégyes a jó választás, hanem a fenti öt vekktorból bármely 4 bázist alkot.
A feladat alapján még ki kell fejeznünk a vektorokat a bázis lineáris kombinációjaként:
v_1, v_2, v_3, v_4 bázis esetén $v_5 =$
v_1, v_2, v_3, v_5 bázis esetén $v_4 =$
v_1, v_2, v_5, v_4 bázis esetén $v_3 =$
v_1, v_5, v_3, v_4 bázis esetén $v_2 =$
v_5, v_2, v_3, v_4 bázis esetén $v_1 =$

3. Keressünk egy csak sorvektorokból álló bázisát a sortérnek, és egy csak oszlopvektorkból álló bázisát az oszloptérnek.

(a) $\begin{bmatrix} 1 & -2 & -4 & 3 \\ -3 & 6 & 12 & -9 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ Ezt a feladatot is az eddigiekhez hasonlóan Gauss-eliminációval oldjuk meg. Ugyanis ekkor meg tudjuk állapítani a sor illetve oszloptér dimenzióját, így meg tudjuk állapítani a bázist is.

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & -4 & 3 \\ -3 & 6 & 12 & -9 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \sim \ldots \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & -4 & 3 \\ 0 & 12 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \end{bmatrix}$$

Látható, hogy a mátrixnak nincs csupa 0 sora vagy oszlopa, így a sorok és oszlopok terének dimenziója 3. Így 3 elemű bázist kell kijelölni. Egyedül az oszloptérben van válaszátsunk. Itt arra kell figyelnünk, hogy a kiválsztott 3 vektor ne legyen összefüggő. az utolsó oszlop az elsőnek 3-szorosa, így ez a két vektor nem kerülhet bele egyszerre az oszloptér bázisába.
Sortér bázisa: $(1,-2,-4,3),(-3,6,12,-9),(1,0,1,3)$.
Oszloptér bázisa: $\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ 12 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(b) $\begin{bmatrix} 2 & -4 & 6 & 8 \\ 2 & -1 & 3 & -5 \\ 4 & -5 & 9 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$ Ezt a feladatot is az eddigiekhez hasonlóan Gauss-eliminációval oldjuk meg. Ugyanis ekkor meg tudjuk állapítani a sor illetve oszloptér dimenzióját, így meg tudjuk állapítani a bázist is.

$$\begin{bmatrix} 2 & -4 & 6 & 8 \\ 2 & -1 & 3 & -5 \\ 4 & -5 & 9 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \sim \dots \sim \begin{bmatrix} 2 & -4 & 6 & 8 \\ 0 & 3 & -3 & -13 \\ 0 & 0 & 2 & \frac{7}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Látható tehát, hogy a mátrixnak van csupa 0 sora. Tehát a sorok és az oszlopok terének dimenziója 3. Így 3 elemű bázist kell kijelölni. Itt bármely olyan 3 három sor v. oszlopvektor jó lesz, amelyek függetlenek. Az első három sor nem lesz megfelelő, ugyanis az első és második sor összege kiadja a harmadik sort, így ezek nem lehetnek egyszerre a bázisban. Oszlopok esetében sem választhatom az első három oszlopot, ugyanis az első és második oszlop különbsége kiadja a harmadik oszlopoz, így ez a három oszlop nem lehet benne egyszerre a bázisban
Sortér bázisa: $(2,-4,6,8),(2,-1,3,-5),(0,1,1-2)$
Oszloptér bázisa: $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 8 \\ -5 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}.$

4. Az alább megadott információk alapján határozzuk meg, hogy az $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ lineáris egyenletrendszernek hány megoldása van, és hogy a megoldásoknak hány paramétere van!

	A mérete	A rangja	$[A\|b]$ rangja
(a)	3×3	3	3
(b)	3×3	2	3
(c)	3×3	1	1
(d)	5×9	2	2
(e)	5×9	2	3
(f)	4×4	0	0
(g)	6×2	2	2

Egy tétel alapján tudjuk meghatározni a megoldások és így a paraméterek számát is.
(a) részben az eredeti mátrix rangja= kibővített mátrix rangja= ismeretlenek száma=3. Ebből azt állapíthatjuk meg, hogy az egyenletrendszer megoldása egyértelmű, azaz 1 megoldás létezik csupán és nincs szabad paraméter.
(b) részben az eredeti mátrix rangja $\neq$ kibővített mátrix rangja. Azaz ennek az egyenletrendszernek nem lesz megoldása, mivel a két rang egyenlősége a megoldhatóság szükséges feltétele.
(c) részben eredeti mátrix rangja= kibővített mátrix rangja $<$ ismeretlenek száma. Ebből azt állapíthatjuk meg, hogy ez egyenletrendszernek végtelen sok megoldása van és a szabad paraméterek száma $3 - 1 = 2$.
(d) részben eredeti mátrix rangja= kibővített mátrix rangja $<$ ismeretlenek száma. Ebből azt állapíthatjuk meg, hogy ez egyenletrendszernek végtelen sok megoldása van és a szabad paraméterek száma $9 - 2 = 7$
(e) részben részben az eredeti mátrix rangja $\neq$ kibővített mátrix rangja. Azaz ennek az egyenletrendszernek nem lesz megoldása, mivel a két rang egyenlősége a megoldhatóság szükséges feltétele.
(f) részben
(g) részben az eredeti mátrix rangja= kibővített mátrix rangja= ismeretlenek száma=2. Ebből azt állapíthatjuk meg, hogy az egyenletrendszer megoldása egyértelmű, azaz 1 megoldás létezik csupán és nincs szabad paraméter.
Megjegyzés: az ismeretlenek száma= oszlopok száma.

5. Legyen $\mathbf{p} = a_0 + a_1x + a_2x^2$ és $\mathbf{q} = b_0 + b_1x + b_2x^2$ a P_2 tér két vektora. Igazoljuk, hogy a $\langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle = a_0b_0 + a_1b_1 + a_2b_2$ képlettel definiált művelet tényleg skaláris szorzat (belső szorzat) a P_2 téren !
Ahhoz, hogy ez tényleg skaláris szorzat, ahhoz elenőriznünk kell a tulajdonságait.

   (a) linearitás: $\langle \mathbf{p_1} + \mathbf{p_2}, \mathbf{q} \rangle = \langle \mathbf{p_1}, \mathbf{q} \rangle + \langle \mathbf{p_2}, \mathbf{q} \rangle$

$$\langle langle \mathbf{p_1} + \mathbf{p_2}, \mathbf{q} \rangle = (a_0 + A_0)b_0 + (a_1 + A_1)b_1 + (a_2 + A_2)b_2 =$$

$$(a_0b_0 + a_1b_1 + a_2b_2) + (A_0b_0 + A_1b_1 + A_2b_2) = \langle \mathbf{p_1}, \mathbf{q} \rangle + \langle \mathbf{p_2}, \mathbf{q} \rangle$$

Tehát ez a tulajdonság rendben van.

(b) konstansszoros: $\langle \lambda\mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle = \lambda\langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle$

$$\langle \lambda\mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle = \lambda a_0b_0 + \lambda a_1b_1 + \lambda a_2b_2 = \lambda(a_0b_0 + a_1b_1 + a_2b_2) = \lambda\langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle$$

Tehát ez a tulajdonság is rendben van.

(c) szimmetrikusság: $\langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle = \langle \mathbf{q}, \mathbf{p} \rangle$

$$\langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle == a_0b_0 + a_1b_1 + a_2b_2 = b_0a_0 + b_1a_1 + b_2a_2 = \langle \mathbf{q}, \mathbf{p} \rangle$$

Ez is teljesül.

(d) pozitivitás: $\langle \mathbf{p}, \mathbf{p} \rangle \geq 0, \langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle = 0$akkor és csak akkor, ha$\mathbf{p} = 0$

$$\langle \mathbf{p}, \mathbf{p} \rangle = a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 \geq 0$$

A fenti egyenlőtlenség azért teljesül, mivel négyzetszámokat adunk össze, amik mindig nem negatívak, és csak akkor egyenlő a fenti összeg nullával, ha $a_0 = a_1 = a_2 = 0$. Azaz a nullpolinomról van szó, azaz $\mathbf{p} = 0$.

6. Legyen $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ és $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$. Határozzuk meg, hogy a következők közül melyek skalár szorzatok az R^3-on
A feladat megoldásához ellenőriznünk kell a skaláris szorzat fenti tulajdonságainak teljesülését.

(a) $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = u_1v_1 + u_3v_3$
Ez skaláris szorzat lesz, a fentiekhez hasonlóan vezethető le, és minden tulajdonság teljesül majd.

(b) $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = u_1^2v_1^2 + u_2^2v_2^2 + u_3^2v_3^2$
Ez sajnos nem lesz skaláris szorzat, mivel a linearitás nem teljesül rá. Ugyanis:

$$\langle \mathbf{u_1} + \mathbf{u_2}, \mathbf{v} \rangle = (u_1+U_1)^2v_1^2+(u_2+U_2)^2v_2^2+(u_3+U_3)^2v_3^2) \neq (u_1^2v_1^2+u_2^2v_2^2+u_3^2v_3^2)+(U_1^2v_1^2+U_2^2v_2^2+U_3^2v_3^2)$$

A fenti egyenlőség azért nem áll fent, mivel két tag négyzete három tagból áll, így nem egy kéttagú összeget kapnánk hanem háromtagút. Azaz nem teljeseül már a skaláris szorzat első tulajdonsága sem, így a fent deifiniált kifejezés NEM skaláris szorzat.

(c) $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 2u_1v_1 + u_2v_2 + 4u_3v_3$
Ez skaláris szorzat lesz, a fentiekhez hasonlóan vezethető le, és minden tulajdonság teljesül majd.

(d) $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = u_1v_1 - u_2v_2 + u_3v_3$
lesz skaláris szorzat Ez sajnos nem lesz skaláris szorzat. A 4. tulajdonság a pozitivitás nem teljesül rá minden esetben. Például $u = (1, 2, 1)$ esetén $\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle = 1 - 4 + 1 = -2 < 0$. Tehát ez emiatt nem lesz skaláris szorzat.

7. Igazoljuk, hogy ha $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$ euklideszi skalár szorzat R^n-en és A pedig egy $n \times n$-es mátrix, akkor

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{Av} \rangle = \langle \mathbf{A^T u}, \mathbf{v} \rangle$$

8. A 2π szerint periódikus integrálható függvények terén tekintsük a következő műveltet:

$$\langle \mathbf{f}, \mathbf{g} \rangle = \int_0^{2\pi} f(x)g(x)dx$$

, ahol $\mathbf{f} = f(x)$, és $\mathbf{g} = g(x)$. Igazoljuk, hogy ez a művelet valóban skalár szorzás! Számítsuk ki a $\langle \mathbf{f}, \mathbf{g} \rangle$ értékét!
Először is igazolnunk kell, hogy a fent definiált művelet valóban skaláris szorzás, azaz teljesül rá az a bizonyos 4 tulajdonság.

(i) linearitás: $\langle \mathbf{f_1} + \mathbf{f_2}, \mathbf{g}\rangle = \langle \mathbf{f_1}, \mathbf{g}\rangle + \langle \mathbf{f_2}, \mathbf{g}\rangle$
Ez a tulajdonság teljesül az integrálás linearitása miatt. Ugyanis:

$$\langle \mathbf{f_1} + \mathbf{f_2}, \mathbf{g}\rangle = \int_0^{2\pi} (f_1(x) + f_2(x))g(x)dx = \int_0^{2\pi} f_1(x)g(x)dx + \int_0^{2\pi} f_2(x)g(x)dx = \langle \mathbf{f_1}, \mathbf{g}\rangle + \langle \mathbf{f_2}, \mathbf{g}\rangle$$

(ii) skalárszorzás: $\langle \lambda\mathbf{f}, \mathbf{g}\rangle = \lambda\langle \mathbf{f}, \mathbf{g}\rangle$
Ez a tulajdonság is teljesül a konstans kiemelhetősége miatt. Ugyanis:

$$\langle \lambda\mathbf{f}, \mathbf{g}\rangle = \int_0^{2\pi} \lambda f(x)g(x)dx = \lambda \int_0^{2\pi} f(x)g(x)dx = \lambda\langle \mathbf{f}, \mathbf{g}\rangle$$

(iii) szimmetrikusság: $\langle \mathbf{f}, \mathbf{g}\rangle = \langle \mathbf{g}, \mathbf{f}\rangle$
Ez is teljesül, ugyanis:

$$\langle \mathbf{f}, \mathbf{g}\rangle = \int_0^{2\pi} f(x)g(x)dx = \int_0^{2\pi} g(x)f(x)dx = \langle \mathbf{g}, \mathbf{f}\rangle$$

(iv) pozitivitás: $\langle \mathbf{f}, \mathbf{f}\rangle \geq 0$
Ez is teljesül, mivel pozitív függvény integráljának értéke is pozitív. És csak akkor egyenlő 0-val, ha a 0 függvény integráljuk. De ez csak abban az esetben áll fenn, ha $f(x) = 0$.

$$\langle \mathbf{f}, \mathbf{f}\rangle = \int_0^{2\pi} f^2(x)dx \geq 0$$

A feladat következő részében csak ki kell számolni a megfelelő integrálokat.

(a) $\mathbf{f} = \cos x, \quad \mathbf{g} = \sin x$

$$\langle \mathbf{f}, \mathbf{g}\rangle = \int_0^{2\pi} \cos x \sin x \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \sin 2x = \frac{1}{2}\left[-\frac{\cos 2x}{2}\right]_0^{2\pi} = 0$$

(b) $\mathbf{f} = \cos kx, \quad \mathbf{g} = \sin lx$, ahol k és l egész számok

$$\langle \mathbf{f}, \mathbf{g}\rangle = \int_0^{2\pi} \cos kx \sin lx \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \sin(l+k)x + \sin(l-k)x\mathrm{d}x = \ldots = 0$$

Az integrál meghatározásánál használtuk az ismert trigonometrikus azonosságot.

(c) $\mathbf{f} = \tan \frac{x}{8}, \quad \mathbf{g} = 1$

$$\langle \mathbf{f}, \mathbf{g}\rangle = \int_0^{2\pi} \tan \frac{x}{8}\mathrm{d}x = \int_0^{2\pi} \frac{\sin\frac{x}{8}}{\cos\frac{x}{8}} = \left[-8\ln\cos\frac{x}{8}\right]_0^{2\pi} = 4\ln 2$$

9. Az 5. feladatban megadott skaláris szorzattal számítsuk ki $\|\mathbf{p}\|$-t!
Egy adott kifejezés normáját a skaláris szorzat segítségével a következő módon számoljuk ki: $\|\mathbf{p}\| = \sqrt{\langle \mathbf{p}, \mathbf{p}\rangle}$. Ezt használjuk a feladat megoldásában.

(a) $\mathbf{p} = -1 + 2x + x^2$

$$\|\mathbf{p}\| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2 + 1^2} = \sqrt{6}$$

(b) $\mathbf{p} = 3 - 4x^2$

$$\|\mathbf{p}\| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$$

10. Legyen $\mathbf{u} = (3, 0, 1, 2)$, $\mathbf{v} = (-1, 2, 7, -3)$, és $\mathbf{w} = (2, 0, 1, 1)$. Számítsuk ki az alábbi kifejezéseket!
Itt is az előbb megismert képletet fogjuk használni, illetve azt amit a vektorokkal kapcsolatos műveletekről tudunk.

(a) $\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|$

$$mathbfu+\mathbf{v}=(2,2,8,-1)$$
$$\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|=\sqrt{4+4+64+1}=\sqrt{73}$$

(b) $\|\mathbf{u}\|+\|\mathbf{v}\|$

$$\|\mathbf{u}\|=\sqrt{9+0+1+4}=\sqrt{14}$$
$$\|\mathbf{v}\|=\sqrt{1+4+49+9}=\sqrt{63}$$
$$\|\mathbf{u}\|+\|\mathbf{v}\|=\sqrt{14}+\sqrt{63}$$

(c) $\|-2\mathbf{u}\|+2\|\mathbf{v}\|$

$$\|-2\mathbf{u}\|=\sqrt{36+0+4+16}=\sqrt{56}$$
$$\|-2\mathbf{u}\|+2\|\mathbf{v}\|=\sqrt{56}=2\sqrt{62}$$

(d) $\|3\mathbf{u}-5\mathbf{v}+\mathbf{w}\|$

$$3\mathbf{u}-5\mathbf{v}+\mathbf{w}=(15,-10,-31,22)$$
$$\|3\mathbf{u}-5\mathbf{v}+\mathbf{w}\|=\sqrt{15^2+(-10)^2+(-31)^2+22^2}$$

(e) $\frac{1}{\mathbf{w}}\mathbf{w}$

(f) $\|\frac{1}{\mathbf{w}}\mathbf{w}\|$

11. Írjuk fel az $\mathbf{u}$ és $\mathbf{v}$ vektorok közötti euklideszi távolságot!
A feladat megoldása során a következőt használjuk. Az $\mathbf{u}$ és $\mathbf{v}$ vektorok közötti euklideszi távolság a következő módon számolható: $\|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|$

(a) $\mathbf{u}=(2,-1)$; $\mathbf{v}=(3,2)$

$$\mathbf{u}-\mathbf{v}=(-1,-3)$$
$$\|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|=\sqrt{1+9}=\sqrt{10}$$

(b) $\mathbf{u}=(1,1,-1)$; $\mathbf{v}=(2,6,0)$

$$\mathbf{u}-\mathbf{v}=(-1,-5,-1)$$
$$\|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|=\sqrt{1+25+1}=\sqrt{27}$$

(c) $\mathbf{u}=(2,0,1,3)$; $\mathbf{v}=(-1,4,6,6)$

$$\mathbf{u}-\mathbf{v}=(3,-4,-5,-3)$$
$$\|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|=\sqrt{9+16+25+9}=\sqrt{59}$$

(d) $\mathbf{u}=(6,0,1,3,0)$; $\mathbf{v}=(-1,4,2,8,3)$

$$\mathbf{u}-\mathbf{v}=(7,-4,-1,-5,,-3)$$
$$\|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|=\sqrt{49+16+1+25+9}=\sqrt{100}=10$$

12. Igazoljuk az

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}=\frac{1}{4}\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|^2-\frac{1}{4}\|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|^2$$

egyenlőséget bármely R^n-beli $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ vektorokra!
Az egyenlőség igazolásánál csupán a norma és skaláris szorzat közötti kapcsolatot kell használni. Emellett a skaláris szorzat linearitását kell használni.

13. Határozzuk meg, hogy a megadott vektorok merőlegesek-e egymásra az euklideszi skaláris szorzat szerint!
Két vektor akkor merőleges egymásra, ha az euklidészi skaláris szorzatuk 0. Ezt kell tehát ellenőriznünk minden esetben.

(a) $\mathbf{u} = (-1, 2, 4), \quad \mathbf{v} = (2, 3 - 1)$

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = -2 + 6 - 4 = 0$$

Tehát ez a két vektor merőleges egymásra.

(b) $\mathbf{u} = (1, 1, 1), \quad \mathbf{v} = (-1, -1, -1)$

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = -1 - 1 - 1 = -3$$

Tehát ez a két vektor nem merőleges egymásra.

(c) $\mathbf{u} = (a, b, c), \quad \mathbf{v} = (0, 0, 0)$

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 0 + 0 + 0 = 0$$

Minden a,b,c paraméter esetén merőleges lesz egymásra a két vektor.

(d) $\mathbf{u} = (-2, 3, -5, 1), \quad \mathbf{v} = (2, 1, -2, -9)$

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = -4 + 3 + 10 - 9 = 0$$

Tehát a két vektor merőleges egymásra.

(e) $\mathbf{u} = (0, -1, 2, 5), \quad \mathbf{v} = (1, -2, 3, 0)$

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 0 + 2 + 6 + 0 = 8$$

Tehát ez a két vektor nem merőleges egymásra.

(f) $\mathbf{u} = (a, b), \quad \mathbf{v} = (-b, a)$

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = -ab + ab = 0$$

Tehát ez a két vektor is merőleges egymásra bármyel a,b paraméter esetén.

14. Tekintsük R^3-on az euklideszi skalár szozatot. Milyen k értékek mellett merőleges egymásra $\mathbf{u}$ és $\mathbf{v}$?
Ebben a feladatban is a fenti feltételt kell ellenőrizni. Azon k paramétereket keressük, amelyek esetén a két vektor euklidészi skaláris szorzata 0.

(a) $\mathbf{u} = (2, 1, 3), \quad \mathbf{v} = (1, 7, k)$

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 2 + 7 + 3k = 0, \quad k = -3$$

Tehát $k = -3$ esetén a két vektor merőleges egymásra.

(b) $\mathbf{u} = (k, k, 1), \quad \mathbf{v} = (k, 5, 6)$

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = k^2 + 5k + 6 = 0, \quad k_1 = 2, k_2 = 3$$

Tehát $k_1 = 2$ és $k_2 = 3$ esetén lesz merőleges egymásra a két vektor.