

# Matematika A2

## 8. feladatsor megoldása

1. Tekintsük az  $R^n$ -et és rajta az euklideszi skalár szorzatot ( $n = 2, 3, 4$ ). Határozzuk meg az  $\mathbf{u}$  és a  $\mathbf{v}$  vektorok által bezárt szög koszinuszát!

A bezárt szög koszinuszát az euklideszi skalárszorzat két lehetséges számolási módjának segítségével kapjuk. Képletszerűen:

$$\cos \alpha = \frac{u_1 v_1 + u_2 v_2 + \dots}{\|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|}$$

(a)  $\mathbf{u} = (1, -3)$ ,  $\mathbf{v} = (2, 4)$

$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{10}$$

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{18}$$

$$\cos \alpha = \frac{2 - 12}{\sqrt{180}} = -\frac{5}{3\sqrt{5}}$$

(b)  $\mathbf{u} = (-1, 0)$ ,  $\mathbf{v} = (3, 8)$

$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{1} = 1$$

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{73}$$

$$\cos \alpha = \frac{-3}{\sqrt{73}}$$

(c)  $\mathbf{u} = (-1, 5, 2)$ ,  $\mathbf{v} = (2, 4, -9)$

$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{30}$$

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{101}$$

$$\cos \alpha = \frac{-2 + 20 - 18}{\sqrt{3030}} = 0$$

Azaz ez a két vektor merőleges egymásra.

(d)  $\mathbf{u} = (4, 1, 8)$ ,  $\mathbf{v} = (1, 0, -3)$

$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{81} = 9$$

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{10}$$

$$\cos \alpha = \frac{4 + 0 - 24}{9\sqrt{10}} = -\frac{20}{9\sqrt{10}}$$

(e)  $\mathbf{u} = (1, 0, 1, 0)$ ,  $\mathbf{v} = (-3, -3, -3, -3)$

$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{2}$$

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{36} = 6$$

$$\cos \alpha = \frac{-3 - 0 - 3 - 0}{6\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

(f)  $\mathbf{u} = (2, 1, 7, -1)$ ,  $\mathbf{v} = (4, 0, 0, 0)$

$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{55}$$

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{16} = 4$$

$$\cos \alpha = \frac{8 + 0 + 0 + 0}{4\sqrt{55}} = \frac{2}{\sqrt{55}}$$

2. Határozza meg az  $\mathbf{a} = (1, 1, 1, 1)$  és a  $\mathbf{b} = (1, 1, 1, 0)$ ,  $\mathbf{c} = (1, 1, 0, 0)$ ,  $\mathbf{d} = (1, 0, 0, 0)$  vektorok között lévő szöveget a szokásos, euklideszi skalár szorzattal.

A feladat megoldása során a fenti képletet használjuk majd.

$$\|\mathbf{a}\| = \sqrt{4} = 2$$

$$\|\mathbf{b}\| = \sqrt{3}$$

$$\|\mathbf{c}\| = \sqrt{2}$$

$$\|\mathbf{d}\| = \sqrt{1} = 1$$

$$\cos(a, b) = \frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Tehát az  $a$  és  $b$  vektorok által bezárt szög:  $\frac{\pi}{6}$ .

$$\cos(a, c) = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{c}}{2}$$

Tehát az  $a$  és  $c$  vektorok által bezárt szög:  $\frac{\pi}{4}$ .

$$\cos(a, d) = \frac{1}{2}$$

Tehát az  $a$  és  $d$  vektorok által bezárt szög:  $\frac{\pi}{3}$ .

$$\cos(b, c) = \frac{2}{\sqrt{6}}$$

Tehát az  $b$  és  $c$  vektorok által bezárt szög: .

$$\cos(b, d) = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Tehát az  $b$  és  $d$  vektorok által bezárt szög: .

$$\cos(c, d) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Tehát az  $c$  és  $d$  vektorok által bezárt szög:  $\frac{\pi}{4}$ .

3. Legyen  $V$  egy skalárszorzos tér. Mutassuk meg, hogy ha  $\mathbf{u}$  és  $\mathbf{v}$  ortogonális vektorok  $V$ -ben úgy, hogy  $\|\mathbf{u}\| = \|\mathbf{v}\| = 1$ , akkor  $\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| = \sqrt{2}$ !

4. Legyen  $V$  egy skalárszorzos tér. Igazoljuk a

$$\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 + \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^2 = 2\|\mathbf{u}\|^2 + 2\|\mathbf{v}\|^2$$

azonosságot  $V$  minden  $\mathbf{u}$  és  $\mathbf{v}$  vektorára!

A feladat megoldása során a skaláris szorzat és a norma közötti kapcsolatot, illetve a skaláris szorzat linearitását kell használni.

5. Tekintsük az  $R^3$ -at az euklideszi skalár szorzással. Az alábbiak közül melyek ortonormált vektorhalmazok?

Egy vektorhalmaz akkor ortonormált, ha a benne lévő vektorok páronként merőlegesek egymásra, és a hosszuk 1.

$$(a) \quad a = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \quad b = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right), \quad c = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

A fenti vektorhalmaz nem lesz ortonormált, mert a  $b$  és  $c$  vektorok nem lesznek merőlegesek egymásra. Ugyanis

$$\langle \mathbf{b}, \mathbf{c} \rangle = -\frac{1}{\sqrt{6}} - \frac{1}{\sqrt{6}} \neq 0$$

Emiatt tehát nem alkotnak ortonormált vektorrendszert.

$$(b) \quad a = \left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right), \quad b = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right), \quad c = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$$

A fenti vektorhalmaz ortonormált. A vektorok páronként merőlegesek, és egység hosszúak.

$$(c) \quad a = (1, 0, 0), \quad b = \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \quad c = (0, 0, 1)$$

A fenti vektorhalmaz nem ortonormált, ugyanis a  $b$  és  $c$  vektorok nem merőlegesek egymásra. Ugyanis

$$\langle \mathbf{b}, \mathbf{c} \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \neq 0$$

$$(d) \quad a = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}\right), \quad b = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$$

A fenti vektorhalmaz ortonormált. Ugyanis a két vektor merőleges egymásra, és a hosszuk 1.

6. Határozza meg az  $a, b, c$  valós számokat úgy, hogy a  $\mathbf{v}_1 = (1, 1, 1, 1)$ ,  $\mathbf{v}_2 = (1, 1, -1, a)$  és  $\mathbf{v}_3 = (1, -1, b, c)$  vektorok ortogonálisak legyenek!

A vektorok akkor ortogonálisak, ha merőlegesek egymásra. Azaz azt kell ellenőriznünk, hogy a megfelelő euklidészi skaláris szorzatok 0-k legyenek.

$$\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle = 1 + 1 - 1 - a = 0, \rightarrow \quad a = -1$$

$$\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_3 \rangle = b + c = 0$$

$$\langle \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 \rangle = -b - c = 0$$

A fenti egyenletekből azt látjuk, hogy a  $b$  és  $c$  paraméterek között a következő kapcsolat áll fenn:  $b = -c$ . Azaz a feladat megoldása:  $a = -1$ , míg  $b = -c$ , ahol  $b$  értéke szabadon megválasztható.

7. Határozza meg az  $\mathbb{R}^3$ -ben lévő  $x + y + z = 0$  sík egy ortonormált bázisát!

A sík egy kétdimenziós altér, így az ortonormált bázis két vektorból áll majd. Emellett annak is teljesülnie kell, hogy a két vektor merőleges egymásra, benne vannak a síkban illetve hosszuk 1.

A következő vektorpár ortonormált bázis:  $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$  és  $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ .

8. Tekintsük az  $\mathbb{R}^3$ -at az euklidészi skalár szorzással. Használjuk a Gram-Schmidt-módszert az  $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$  bázis ortonormált bázissá alakítására!

A Gram-Schmidt ortogonalizációs eljárás során a következő lépéseket kell végrehajtani:

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{u}_1$$

$$\mathbf{v}_2 = \mathbf{u}_2 - \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{u}_2 \rangle \frac{\mathbf{v}_1}{\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1 \rangle}$$

$$\mathbf{v}_3 = \mathbf{u}_3 - \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{u}_3 \rangle \frac{\mathbf{v}_1}{\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1 \rangle} - \langle \mathbf{v}_2, \mathbf{u}_3 \rangle \frac{\mathbf{v}_2}{\langle \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_2 \rangle}$$

Ezek még nem lesznek ortonormált vektorok, tehát még le kell majd őket normálni.

$$(a) \quad \mathbf{u}_1 = (1, 1, 1), \quad \mathbf{u}_2 = (-1, 1, 0), \quad \mathbf{u}_3 = (1, 2, 1)$$

$$\mathbf{v}_1 = (1, 1, 1), \quad \mathbf{v}_2 = (-1, 1, 0), \quad \mathbf{v}_3 = \left(\frac{1}{6}, \frac{1}{6}, -\frac{1}{3}\right)$$

Ezeket a vektorokat még le kell normálnunk. Tehát a végeredmény:

$$\mathbf{v}_1 =, \quad \mathbf{v}_2 =, \quad \mathbf{v}_3 =$$

(b)  $\mathbf{u}_1 = (1, 0, 0)$ ,  $\mathbf{u}_2 = (3, 7, -2)$ ,  $\mathbf{u}_3 = (0, 4, 1)$

$$\mathbf{v}_1 = (1, 0, 0), \mathbf{v}_2 = (0, 7, -2), \mathbf{v}_3 = (0, \frac{30}{53}, \frac{105}{53})$$

Ezeket a vektorokat még le kell normálnunk. Tehát a végeredmény:

$$\mathbf{v}_1 =, \mathbf{v}_2 =, \mathbf{v}_3 =$$

9. Határozzuk meg  $\mathbf{v}$   $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$  szerinti koordináta vektorát és a koordináta mátrixát !

(a)  $\mathbf{v} = (2, -1, 3)$ ;  $\mathbf{v}_1 = (1, 0, 0)$ ,  $\mathbf{v}_2 = (2, 2, 0)$ ,  $\mathbf{v}_3 = (3, 3, 3)$

A koordinátavektor meghatározásához meg kell oldanunk a következő egyenletrendszert:  $av_1 + bv_2 + cv_3 = v$ . Ekkor  $\mathbf{v}$  koordinátavektora:  $(a, b, c)$ . Az egyenletrendszer egyszerűen megoldható az eredménye:  $c = 1$ ,  $b = -2$ ,  $a = 3$ .

Tehát  $\mathbf{v}$  koordinátavektora:  $(3, -2, 1)$ .

(b)  $\mathbf{v} = (5, -12, 3)$ ;  $\mathbf{v}_1 = (1, 2, 3)$ ,  $\mathbf{v}_2 = (-4, 5, 6)$ ,  $\mathbf{v}_3 = (7, -8, 9)$  A koordinátavektor meghatározásához meg kell oldanunk a következő egyenletrendszert:  $av_1 + bv_2 + cv_3 = v$ . Ekkor  $\mathbf{v}$  koordinátavektora:  $(a, b, c)$ . Az egyenletrendszer egyszerűen megoldható az eredménye:  $c = -0, 8$ ,  $b = -1, 2$ ,  $a = 5, 8$ .

Tehát  $\mathbf{v}$  koordinátavektora:  $(5, 8; -1, 2; -0, 8)$ .

10. Tekinsük a  $B = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$  és a  $B' = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$   $R^2$  bázisait, ahol

$$\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{és} \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

(a) Keressük meg a  $B'$ -ből  $B$ -be való bázisátmenet mátrixát!

(b) Keressük meg a  $B$ -ből  $B'$ -be való bázisátmenet mátrixát!

(c) Számítsuk ki a  $[\mathbf{w}]_B$  koordináta mátrixot, ahol  $\mathbf{w} = \begin{bmatrix} 3 \\ -5 \end{bmatrix}$  és a  $[\mathbf{w}]_{B'} = P^{-1}[\mathbf{w}]_B$  képlettel számítsuk ki  $[\mathbf{w}]_{B'}$ -t is!

(d) Számításunk ellenőrzésekén számítsuk ki direkt módon is a  $[\mathbf{w}]_{B'}$ -t!

11. Határozzuk meg, hogy az alábbi mátrixok közül melyek ortogonálisak! Definíció alapján egy mtrix akkor lesz ortogonális, ha  $AA^T = I$

(a)  $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$AA^T = I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Tehát ezen A mátrix ortogonális.

(b)  $B = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$

$$B^T = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

$$BB^T = I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Tahát a B mátrix ortogonális.

$$(c) C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1/\sqrt{2} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

$$C^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

$$CC^T = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Látható, hogy a  $C$  mátrix nem lesz ortogonális, hiszen az előbbi szorzás eredményeképp nem az identitás mátrixot kaptuk meg.

12. Határozza meg az  $\mathbb{R}^2$  természetes bázisában a következő transzformációk mátrixát:

A transzformáció mátrixának megadásához egyszerűen azt kell vizsgálnunk, ahogy a bázisvektoroknak mi lesz a képe, azaz a bázisvektorok mibe mennek át.

(a) az  $y = x$  egyenesre tükrözés ( $\underline{T}_1$ );

$$\text{Az } \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ báziselem képe: } \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Az } \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ báziselem képe: } \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Tehát a keresett transzformációs mátrix:  $T_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ .

(b) az  $y = -x$  egyenesre tükrözés ( $\underline{T}_2$ ); Az  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  báziselem képe:  $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ .

$$\text{Az } \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ báziselem képe: } \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Tehát a keresett transzformációs mátrix:  $T_1 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ .

(c) az  $O$ -ra való tükrözés ( $\underline{T}_3$ ). Az  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  báziselem képe:  $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

$$\text{Az } \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ báziselem képe: } \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Tehát a keresett transzformációs mátrix:  $T_1 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ .

(d) Határozza meg a mátrixok segítségével a  $P(3, 2)$  pont képeit!

(e) Írja fel a  $\underline{T}_2 \underline{T}_1$  mátrixot! Magyarázza meg a kapott eredmény és a  $\underline{T}_3$  mátrix közötti kapcsolatot!

13. Határozza meg az  $\mathbb{R}^3$  természetes bázisában a következő transzformációk mátrixát:

(a) az  $y = x$  síkra tükrözés;

(b) az  $x, y$  síkra vetítés;

(c) a  $z$  tengely körüli  $60^\circ$ -os forgatás.

(d) Határozza meg a mátrixok segítségével a  $P(1, 1, 1)$  pont képeit!

14. (a) Határozza meg  $\mathbb{R}^2$ -ben a  $\frac{\pi}{2}$ -vel való forgatás mátrixát a  $B = \{\mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{b}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\}$  természetes bázisban és a  $B' = \{\mathbf{b}'_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{b}'_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}\}$  bázisban!

(b) Határozza meg a bázisátmenet mátrixot!

(c) Hogyan kaphatjuk meg a  $B'$ -ben vett transzformáció mátrixot a  $B$ -ben vett transzformáció-mátrixból és a bázisátmenet mátrixból?