① a.)

$$f(x) = 1 \;+$$
$$-4 + 2x \;+$$
$$12 - 12x + 3x^2 \;+$$
$$-32 + 48x - 24x^2 + 4x^3$$

$(x-2)^2 = x^2 - 4x + 4$

$(x-2)^3 = x^3 - 6x^2 + 12x - 8$

$$= \boxed{-23 + 38x - 21x^2 + 4x^3}$$

$$\left[= \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k, \text{ ahol } a_0 = -23,\; a_1 = 38,\; a_2 = -21,\; a_3 = 4, \text{ a többi } a_k = 0 \right]$$

b.)

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots, \; \forall x$$

$$\frac{\sin x - x}{x^3 + x^5} = \frac{\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots\right) - x}{x^3 + x^5} = \frac{-\frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \dots}{x^3 + x^5}$$ egyszerűsítek x^3-bel

$$= \frac{-\frac{1}{6} + \frac{x^2}{120} + \dots}{1 + x^2} \xrightarrow{x \to 0} \frac{-1/6}{1} = -\frac{1}{6}$$

② Bővített mátrix formalizmussal, Gauss eliminációval

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 2 & 1 & 8 \\ -1 & 2 & -2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 & 6 \\ -2 & -1 & 3 & -5 \\ 3 & 2 & 2 & 15 \end{array}\right) \sim$$

2. sor += 1. sor
3. sor −= 2× 1. sor
4. sor += 2× 1. sor
5. sor −= 3× 1. sor

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 8 \\ 0 & 4 & -1 & 7 \\ 0 & \boxed{-5} & 0 & -10 \\ 0 & 3 & 5 & 11 \\ 0 & -4 & -1 & -9 \end{array}\right) \sim$$

$\sim$

3. sort osztom (−5)-tel;
2.⟷3. sor csere

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 8 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 2 \\ 0 & 4 & -1 & 7 \\ 0 & 3 & 5 & 11 \\ 0 & -4 & -1 & -9 \end{array}\right) \sim$$

3. sor −= 4× 2. sor
4. sor −= 3× 2. sor
5. sor += 4× 2. sor

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{array}\right) \sim$$

3. sort osztom −1-gyel

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{array}\right) \sim$$

4. sor −= 5×3. sor
5. sor += 3. sor

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \end{array}\right)$$

azonosságokat kihúzhatjuk

$$\Rightarrow \quad a + 2b + c = 8, \quad \boxed{b = 2}, \quad \boxed{c = 1}$$

Visszahelyettesítés

$a + 4 + 1 = 8$

$\boxed{a = 3}$

⇒ Az egyetlen megoldás $\boxed{\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}}$

③ A keresett B mátrix az A <u>inverze</u> – már ha létezik.

1.) megoldás: $\det(A) = (1\cdot 5\cdot 9 + 2\cdot 6\cdot 7 + 3\cdot 4\cdot 8) -$

$$-(3\cdot 5\cdot 7 + 2\cdot 4\cdot 9 + 1\cdot 6\cdot 8) =$$

$$= (45 + 84 + 96) - (105 + 72 + 48) =$$

$$= 225 - 225 = 0 \Rightarrow \boxed{\text{NINCS INVERZ.}}$$

2.) megoldás: megpróbáljuk eliminációval invertálni

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{1} & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ 7 & 8 & 9 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \quad \begin{array}{l} 2.\text{sor} -= 4\times 1.\text{sor} \\ 3.\text{sor} -= 7\times 1.\text{sor} \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{-3} & -6 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & -6 & -12 & -7 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \quad 3.\text{sor} -= 2\times 2.\text{sor}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{0} & 2 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

Az invertálás elakadt

$\Downarrow$

$\boxed{\text{NINCS INVERZ.}}$

(4) A keresett v vektorok

- egyrészt az A sajátvektorai
- másrészt a $\boxed{\text{nulla vektor,}}$ mert persze $A\underline{0} = \underline{0} \parallel \underline{0}$

Sajátvektorok keresése:

a.) Sajátértékek: $0 = \det(A - \lambda I) = \det\begin{pmatrix} 2-\lambda & 6 \\ 6 & 11-\lambda \end{pmatrix} =$

$$= (2-\lambda)(11-\lambda) - 36 = \lambda^2 - 13\lambda + 22 - 36 = \lambda^2 - 13\lambda - 14 =$$

$$= (\lambda + 1)(\lambda - 14) \Rightarrow \boxed{\lambda_1 = -1} \text{ vagy } \boxed{\lambda_2 = +14}$$

b.) sajátvektorok $\lambda_1 = -1$-hez:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 6 & 0 \\ 6 & 12 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 6 & 0 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \end{array}\right) \qquad x + 2y = 0$$

Pl $y = 1$, $x = -2$

$\boxed{v_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ és persze ennek minden számszorosa}}$

c.) Sajátvektorok $\lambda_2 = +14$-hez:

$$\left(\begin{array}{cc|c} -12 & 6 & 0 \\ 6 & -3 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} -2 & 1 & 0 \\ \cancel{-2} & \cancel{1} & \cancel{0} \end{array}\right) \qquad -2x + y = 0$$

Pl $x = 1$, $y = 2$

$\boxed{v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ és persze ennek minden számszorosa}}$

(5) Tudjuk, hogy $M = BDB^{-1}$, ahol

$B = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 3 \\ 3 & -1 \end{array}\right)$ a sajátvektorokból (mint oszlopokból) álló mátrix

és

$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ a sajátértékeket tartalmazó diagonális mátrix.

Ebből $B^{-1} = ?$ $\left(\begin{array}{cc|cc} \boxed{1} & 3 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -10 & -3 & 1 \end{array}\right) \sim$

$\sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & \frac{3}{10} & \frac{-1}{10} \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{1}{10} & \frac{3}{10} \\ 0 & 1 & \frac{3}{10} & \frac{-1}{10} \end{array}\right) \Rightarrow B^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{10} & \frac{3}{10} \\ \frac{3}{10} & \frac{-1}{10} \end{pmatrix}$

avagy $B^{-1} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ [Ez persze kijön a 2x2-es mátrixok invertálási szabályából is.]

$$\Rightarrow M = BDB^{-1} = \frac{1}{10} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix} 1 & 9 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 28 & -6 \\ -6 & 12 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{M = \begin{pmatrix} 2.8 & -0.6 \\ -0.6 & 1.2 \end{pmatrix}}$$