① a.) Legyen $g(x) = \ln(1+x)$

$$\Rightarrow \quad g'(x) = \frac{1}{1+x} \xrightarrow[\text{sor}]{\text{mértani}} 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \dots$$

$$\Longrightarrow \quad g(x) = \int g'(x)\,dx = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \dots + c$$

mivel $g(0) = 0$, $c = 0$

vagyis $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \dots$

$\Downarrow$ szorzás x-szel

$$\boxed{f(x) = x\ln(1+x) = x - x^2 + \frac{x^3}{2} - \frac{x^4}{3} + \frac{x^5}{4} - \frac{x^6}{5} + \dots}$$

b.) ~~Nini, hát e~~

Először is: Igen, konvergens, mert Leibniz típusú:

- a tagok váltakozó előjelűek
- a nagyságuk → monoton csökken
  ↳ és nullához tart.

Másodszor: NINI, ez éppen a $g(x) = \ln x$ Taylor sora az $x = 1$ helyen:

~~$S = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 -$~~

$$S = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \dots = \ln(1+x)\Big|_{x=1} = \ln 2$$

(2) A konstansokat a jobb oldalra átvisszük, majd a lineáris egyenletrendszert Gauss eliminációval oldjuk meg bővített mátrix formalizmussal:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & -2 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right) \underset{\text{sorcsere}}{\overset{1.\leftrightarrow 2.}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\underset{\substack{\text{3. sorból kivonom} \\ \text{az 1. sort } \times 3}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -5 & -7 & 7 \end{array}\right) \underset{\substack{\text{3. sorhoz} \\ \text{hozzáadom} \\ \text{a 2. sort } \times 5}}{\sim}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & +2 \end{array}\right) \underset{\substack{\text{3. sort osztom} \\ (-2)\text{-vel}}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

Visszahelyettesítés: $\boxed{c=-1}$

$b+c=-1 \Rightarrow \boxed{b=-1-c=0}$

$a+2b+3c=-2 \Rightarrow \boxed{a=-2-2b-3c=1}$

$$\boxed{\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}}$$

az egyetlen megoldás

(3) $B\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ és $B\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$

$$\Downarrow$$

$$B\left(\begin{array}{c|c}1 & -1\\ 1 & 1\end{array}\right)=\left(\begin{array}{c|c}1 & 0\\ 0 & 1\end{array}\right)$$

$$\Downarrow$$

B éppen az $\underbrace{\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}}_{=:A}$ mátrix inverze,

~~amit~~ ami létezik, mert

$\det(A)=2\neq 0$

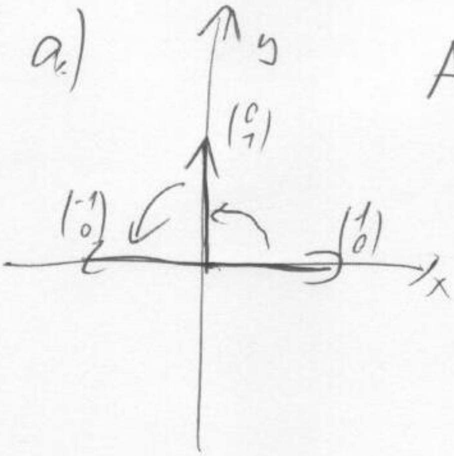
$$\boxed{B=A^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1/2 & 1/2\\ -1/2 & 1/2\end{pmatrix}}$$

Ellenőrzés: $B\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1/2 & 1/2\\ -1/2 & 1/2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ ✓

$B\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1/2 & 1/2\\ -1/2 & 1/2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ ✓

(4) A éppen az origó körüli $\frac{\pi}{6}$-tal – vagyis $30°$-kal való **forgatás** mátrixa $\Rightarrow$ nyilván $\boxed{\text{nincs}}$ olyan (valós) vektor, amihez az irányát változatlanul hagyná. (Kivéve a nulla vektor.)

5 a)



$$A\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \qquad A\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad A=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$$

b.) 100 db forgatás 90°-kal

$\Rightarrow$ = 50 db ellenkező irányba fordítás

$\Rightarrow$ = 25 db oda-vissza fordítás

= semmit nem csinálás

$$\Rightarrow \quad \boxed{A^{100}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}}$$