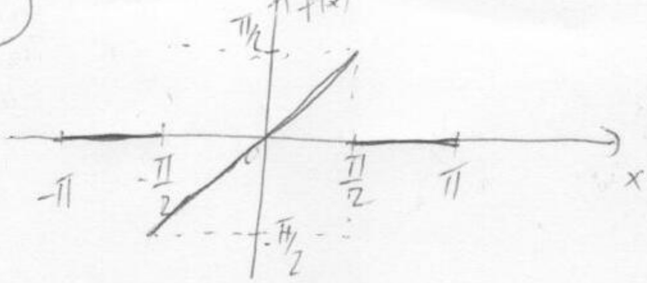
(1)



f páratlan $\Rightarrow \forall\, a_k = 0$

$k = 0, 1, 2, \dots$

Továbbá $b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(kx)\,dx \underset{f(x)=0}{\overset{x\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]\text{-re}}{=}} \frac{1}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} x\sin(kx)\,dx \;\overset{\substack{x \text{ páratlan} \\ \sin(kx) \text{ páratlan} \\ \Downarrow \\ x\cdot\sin(kx) \text{ páros}}}{=}$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} x\sin(kx)\,dx \underset{\substack{u=x \quad u'=1 \\ v'=\sin(kx) \\ v=-\frac{\cos(kx)}{k}}}{\overset{\text{parciálisan}}{=}} \frac{2}{\pi}\left\{\left[x\frac{-\cos(kx)}{k}\right]_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2}\frac{\cos(kx)}{k}\,dx\right\} =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left\{\frac{\pi}{2}\frac{-\cos(k\frac{\pi}{2})}{k} + \left[\frac{\sin(kx)}{k^2}\right]_0^{\pi/2}\right\} = \frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi}{2}\frac{-\cos(k\frac{\pi}{2})}{k} + \frac{\sin(k\pi/2)}{k^2}\right)$$

A $\cos(k\frac{\pi}{2})$ és $\sin(k\frac{\pi}{2})$ mindig -1, 0 vagy 1, attól függően, hogy k-nak 4-gyel osztva mennyi a maradék:

k	1	2	3	4	5	6 ...
$\cos(k\frac{\pi}{2})$	0	-1	0	1	0	-1 ...
$\sin(k\frac{\pi}{2})$	1	0	-1	0	1	0 ...

$\Rightarrow F_f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(kx)$, ahol

a Fourier sor

$$\boxed{b_k = \begin{cases} \frac{-1}{k}, & \text{ha } k = 4l \\ \frac{2}{\pi}\frac{1}{k^2}, & \text{ha } k = 4l+1 \\ \frac{+1}{k}, & \text{ha } k = 4l+2 \\ \frac{2}{\pi}\frac{-1}{k^2}, & \text{ha } k = 4l+3 \end{cases} \quad (\text{és } l \text{ egész})}$$

(2) $f(x,y)=x^3+x^2y+xy^2+y^3-11x-17y$

$$\frac{\partial f}{\partial x}=3x^2+2xy+y^2-11 \quad \xlongequal{\text{ha } x=1,\ y=2} \quad 3+4+4-11=0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=x^2+2xy+3y^2-17 \quad \xlongequal{\text{ha } x=1,\ y=2} \quad 1+4+12-17=0$$

Hurrá, $x=1$, $y=2$-re tényleg

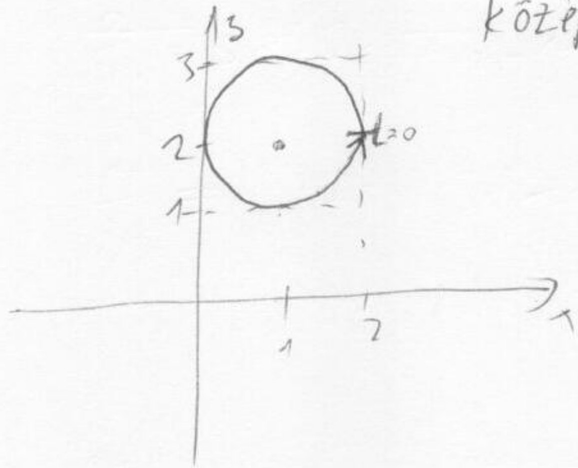
$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial y}=0 \Rightarrow \text{stac. hely.}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=6x+2y & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}=2x+2y \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}=2x+2y & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=2x+6y \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{y=2\\ \text{helyen}}]{\text{az } x=1} \boxed{H=\begin{pmatrix} 10 & 6 \\ 6 & 14 \end{pmatrix} \quad \text{a Hesse mátrix}}$$

$\det(H)=10\cdot 14-6\cdot 6>0 \Rightarrow$ ez egy szélsőértékhely

$H_{11}=10>0 \Rightarrow$ azon belül is $\boxed{\text{lokális minimumhely.}}$

③ A hangya 2 perc alatt pont körbeér az $(1,2)$ középpontú 1 sugarú körön



$\Downarrow$

a megtett út $\underline{\underline{2\pi \approx 6.28}}$ (méter)

Számolással: $r(t) = \left(1+\cos(t\pi),\ 2+\sin(t\pi)\right)$

$\Rightarrow \dot{r}(t) = \left(-\pi\sin(t\pi),\ \pi\cos(t\pi)\right)$

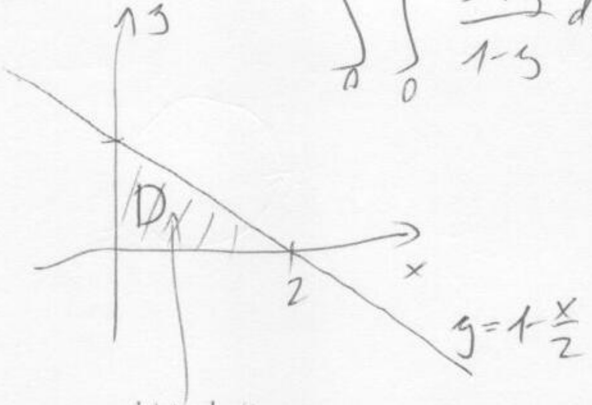
$\Rightarrow |\dot{r}(t)|^2 = \pi^2\sin^2(t\pi) + \pi^2\cos^2(t\pi) = \pi^2 \cdot 1 = \pi^2$

$\Rightarrow |\dot{r}(t)| \equiv \pi$

$\Rightarrow$ az ívhossz $S = \int_0^2 |\dot{r}(t)|\,dt = \int_0^2 \pi\,dt = \underline{\underline{2\pi}}$

④

$$\int_0^2\int_0^{1-\frac{x}{2}} \frac{\sin y}{1-y}\,dy\,dx = \iint_D \frac{\sin y}{1-y}\,dx\,dy = \boxed{\int_0^1\int_0^{2-2y}\frac{\sin y}{1-y}\,dx\,dy}$$



Itt kell integrálni   avagy $x=2-2y$

$$\left[\text{ami mellesleg} = \int_0^1 (2-2y)\frac{\sin y}{1-y}\,dy = 2\int_0^1 \sin y\,dy = 2\big[-\cos y\big]_0^1 = \right.$$

$$\left. = 2(\cos 0 - \cos 1) = \underline{2(1-\cos(1))} \approx 0.92\right]$$

(5) $y'(t) - 3y(t) = 2t - 3t^2$ inhomogén lineáris egyenlet.

A homogén rész $y'(t) - 3y(t) = 0$ állandó együtthatós,

megoldása ránézésre is $y_{hom,\,ált}(t) = Ce^{3t}$.

Mivel tudjuk, hogy az inhomogén egyenlet partikuláris

megoldása $y_p(t) = t^2$,

ezért $y_{inhom\,ált}(t) = y_{hom,\,ált}(t) + y_p(t) = \boxed{Ce^{3t} + t^2}$