Vektorterek

„Definíció": A „vektor" olyan valami, hogy van értelme

- egy vektort egy számmal megszorozni:

  Ha $c \in \mathbb{R}$ szám és v vektor, akkor $c \cdot v$ is vektor

- két vektort összeadni: ha v és w vektorok akkor $v+w$ is vektor

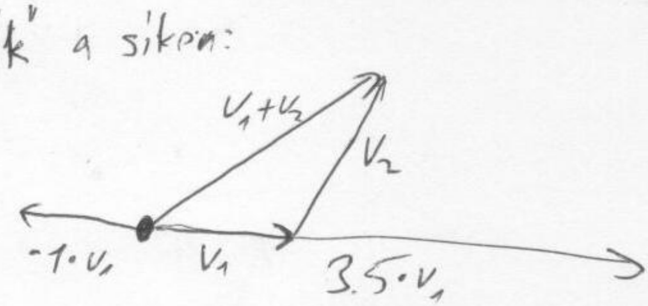
és ez a két művelet úgy viselkedik, ahogy mindenki várná, pl.

$$(v_1+v_2)+v_3 = v_1+(v_2+v_3)$$
$$v_1+v_2 = v_2+v_1$$
$$c\cdot(v_1+v_2) = (c\cdot v_1)+(c\cdot v_2)$$
$$(c_1+c_2)\cdot v = (c_1\cdot v)+(c_2\cdot v)$$

van egy nulla vektor, és $\underset{\text{szám}}{0}\cdot\underset{\text{vektor}}{v} = \underset{\text{vektor}}{\underline{0}}$

stb.

Pl: 0.) „nyilacskák" a síkon:



1.) számpárok: ha $v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ és $v_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$, akkor

$\boxed{\mathbb{R}^2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mid x,y \in \mathbb{R} \right\}}$

$2\cdot v_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}$; $v_1+v_2 = \begin{pmatrix} 2+4 \\ 3+(-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix}$, ahogy Máricka gondolná.

2.) számhármasok: $\begin{pmatrix}2\\1\\4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}6\\7\\9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8\\8\\13\end{pmatrix}\to \mathbb{R}^3$

szám-n-esek: $\begin{pmatrix}2\\1\\4\\5\\9\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\3\\9\\11\\19\end{pmatrix}\to \mathbb{R}^n$

3.) ~~polinomo~~ polinomok:

pl $\left.\begin{array}{l} p_1(x) = 2 - x + 3x^2 + x^4 \\ p_2(x) = x + x^3 \end{array}\right\}$ polinomok,

így $(-3)\cdot p_1 + 2p_2 = -6 + 3x - 9x^2 - 3x^4 + 2x + 2x^3$

$= -6 + 5x - 9x^2 + 2x^3 - 3x^4$ is polinom.

4.) És még NAGYON SOK más példa.

Köv: amit „a vektorokról általában" tudhatunk, annak nagyon sok alkalmazása van.

$\boxed{\text{Kulcs-denifició}}$ Ha $v_1, v_2, \dots, v_n$ vektorok és $c_1, c_2, \dots c_n$ számok, akkor a

$c_1\cdot v_1 + c_2\cdot v_2 + c_3\cdot v_3 + \dots + c_n v_n = \sum_{k=1}^{n} c_k v_k$ vektort a

$v_1, \dots, v_n$ vektorrendszer $\boxed{\text{lineáris kombinációjának}}$ nevezzük.

Fontos: A lineáris kombináció képzése az egyetlen értelmes

művelet, amit egy vektorrendszerrel csinálni lehet:

- nincs értelme • a $v_1 \cdot v_2$ szorzásnak
- a v_1^2 vagy $\frac{1}{v_1}$ vagy $\sqrt{v_1}$ vagy $\sin(v_1)$ kifejezéseknek

vektorokkal $\boxed{\text{csak azt a két dolgot}}$ lehet csinálni (általában),

ami a definícióban szerepel: 1.) összeadni,

és

2.) számmal szorozni,

Def: A $v_1, v_2, \ldots, v_n$ vektorrendszer lineárisan független, ha semelyik eleme sem állítható elő a többi lineáris kombinációjaként.

[és lineárisan összefüggő, ha nem független.]

[Magyarázat: a „független" kb azt jelenti, hogy nincsenek „felesleges" vektorok, akik a többiekből kifejezhetők.]

Tétel (könnyű): A $v_1, \ldots, v_n$ vektorrendszer akkor és csak akkor lineárisan független, ha a nulla vektort $\boxed{\text{csak egyféleképpen}}$ lehet előállítani

$\underline{0} = c_1 v_1 + c_2 v_2 + \dots + c_n v_n$ lineáris kombinációként,

és pedig a $c_1 = c_2 = \dots = c_n = 0$ triviális módon:

$$\underline{0} = 0 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 + 0 \cdot v_3 + \dots + 0 \cdot v_n \quad \text{(persze).}$$

<u>Pl:</u> $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ $v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ $v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$ esetén a

v_1, v_2, v_3 rendszer <u>NEM</u> független, mert

$$v_3 = 2 \cdot v_1 - v_2$$ (v_3 előáll mint v_1 és v_2 lineáris kombinációja,)

avagy $2v_1 - v_2 - v_3 = \underline{0}$ (a $\underline{0}$ előáll mint v_1, v_2, v_3 $\underbrace{\text{nem-triviális}}_{\text{nem csupa nulla együttható}}$ lineáris kombinációja)

Előre szólok: A <u>lineáris algebra</u> nevű tudományág <u>legfontosabb feladata</u> ~~a~~ annak eldöntése, hogy

- egy $v_1, \dots v_n$ vektorrendszer lineárisan független-e vagy sem ill.
- egy v_n vektor előáll-e adott $v_1, \dots, v_{n-1}$ vektorok lineáris kombinációjaként, ~~ill.~~ és ha igen, <u>hogyan</u>: ~~Ka~~ vannak-e olyan $c_1, \dots, c_{n-1}$ számok, hogy $v_n = c_1 v_1 + \dots + c_{n-1} v_{n-1}$

• egy $V_1, \dots, V_n$ vektorrendszerben legfeljebb hány lineárisan független vektort lehet találni.

[Ez a szám a rendszer <u>rangja</u>.]

<u>Def:</u> A $v_1, \dots, v_n$ vektorrendszer <u>generátorrendszer</u> (egy vektortérben), ha ~~a minden vekt~~or a tér minden vektora előáll, mint $v_1, \dots, v_n$ lineáris kombinációja.

<u>Pl:</u> $\mathbb{R}^3$-ban generátorrendszer az $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ rendszer, mert akármilyen $v = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ vektor előáll mint

$$v = x\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + y\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + z\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$ lineáris kombináció.

<u>Def:</u> A $v_1, \dots, v_n$ vektorrendszer <u>bázis</u> (egy vektortérben), ha <u>lineárisan független</u> <u>és</u> <u>generátorrendszer</u>.

<u>Tétel:</u> A $v_1, \dots, v_n$ rendszer <u>akkor és csak akkor</u> bázis a V vektortérben, ha minden vektor <u>pontosan 1-féleképpen</u> áll elő belőle mint lineáris kombináció:

<u>Fdef</u>

$\forall v \in V \; \exists! \; c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$, hogy $c_1 v_1 + c_2 v_2 + \dots + c_n v_n = v$

<u>Def:</u> Ilyenkor a $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$ számokat a v vektor <u>koordinátáinak</u> nevezzük a $v_1, \dots, v_n$ bázisban.

<u>Pl:</u> Az $\begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 9 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ vektor koordinátái az $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

<u>standard bázisban</u> $(5, 7, 9)$, mert $\begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 9 \end{pmatrix} = 5 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 7 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 9 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$,

de ugyanezen $\begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 9 \end{pmatrix}$ vektor koordinátái az

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\text{egy bázis a sok közül}}$$

bázisban $\left(\frac{3}{2}, \frac{11}{2}, \frac{7}{2}\right)$, mert

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 9 \end{pmatrix} = \frac{3}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{11}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{7}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

<u>Tétel / definíció:</u> Egy V vektortér bármely két bázisának elemszáma (a vektorok darabszáma) <u>azonos</u>:

ha $(v_1, \dots, v_n)$ és $(e_1, \dots, e_m)$ is bázis, akkor $n = m$.

Ezt a közös elemszámot nevezzük a V vektortér $\boxed{\text{dimenzió}}$jának.

Pl: 1) $\mathbb{R}^2$ dimenziója 2, benne bázis az $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$

2) $\mathbb{R}^n$ dimenziója n, benne bázis az $\begin{pmatrix}1\\0\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\\vdots\\\vdots\end{pmatrix}, \dots \begin{pmatrix}0\\\vdots\\\vdots\\0\\1\end{pmatrix}$

3) $V := \{$ legfeljebb 3-adfokú polinomok $\}$ dimenziója 4:

benne bázis a $\left.\begin{array}{l} p_1(x) = 1 \\ p_2(x) = x \\ p_3(x) = x^2 \\ p_4(x) = x^3 \end{array}\right\}$ 4 db jól fésült, legfeljebb 3-adfokú polinom, akkiből

mindenki előállítható lineáris kombinációként

↳ vagyis $\boxed{\text{számmal}}$ való szorzás és összeadás segítségével.

pl. Ha $p(x) = x^3 - 2x$, akkor

$$p = 0 \cdot p_1 - 2 \cdot p_2 + 0 \cdot p_3 + 1 \cdot p_4 .$$

[Fontos. A $p_2(x) \cdot p_3(x)$ szorzás NEM ÉRTELMES MINT VEKTORMŰVELET]

4.) $V := \{\text{polinomok}\}$ dimenziója <u>végtelen</u>.

<u>Nagyszerű tény</u>: bármely <u>véges</u> ~~n~~ dimenziós V vektortér <u>lényegében azonos</u> $\mathbb{R}^n$-nel (ahol n a dimenzió).

Ehhez V-ben <u>rögzíteni kell egy bázist</u> (a sok közül), és ezek után a

$$V \ni v \text{ vektor} \longleftrightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}}_{\text{koordináták}} \in \mathbb{R}^n$$

azonosítás megtehető.

Ez azért (is) jó, mert a $\boxed{\text{koordinátákkal lehet számolni}}$.