Sztochasztika 2 félvizsga - megoldások

Felsőbb matematika informatikusoknak – Sztochasztika

2017. január 3. 09:00. Munkaidő: 90 perc. Minden feladat 5 pontot ér.

1. Használható-e a Hoeffding-egyenlőtlenség, és használható-e a Cramér nagy eltérés tétel a $P(X_1 + X_2 + \cdots + X_n < K)$ valószínűség becslésére (trükközés nélkül) az alábbi esetekben? *A válaszokat indokoljuk!*

   a.) Az X_k-k független 1 paraméterű exponenciálisok.

   b.) Az X_k-k független és azonos, de ismeretlen eloszlásúak, viszont $P(2 \leq X_k \leq 5) = 1$, továbbá ismert a várható értékük és a szórásuk.

   c.) X_k egyenletes a $[0, k]$ intervallumon, és az X_k-k függetlenek.

   d.) Jancsi egy szabályos érmét dobál. X_k legyen 1, ha a k-adik és a $k+1$-edik dobás is fej, egyébként pedig legyen 0.

   Megoldás: *(Minden hibátlan részfeladat* 1 *pont. Hibás vagy hibásan indokolt részfeladatra nem jár pont. Ha mind jó, akkor további* 1 *pont.)* A Hoeffding-egyenlőtlenség akkor használható, ha az X_k-k függetlenek, korlátosak és az összeg várható értéke ismert. A Cramér tétel akkor használható, ha az X_k-k függetlenek, azonos eloszlásúak, és az eloszlásuk ismert (plusz egy enyhe technikai feltétel a momentum-generáló függvényről). Ennek alapján

	Hoeffding	Cramér
a.)	NEM, mert nem korlátosak	IGEN
b.)	IGEN	NEM, mert ismeretlen az eloszlás
d.)	IGEN	NEM, mert nem azonos eloszlásúak
e.)	NEM, mert nem függetlenek	NEM, mert nem függetlenek

2. Egy nagy országban a sok szavazó 2 pártra oszlik: 70%-uk a „Mindenkit Utálunk” párt (MU) híve, 30%-uk pedig a „Becsüljetek Minket” párt (BM) támogatója. Egy közvéleménykutató intézet 500 szavazót kérdez meg a pártszimpátiájáról. Adjunk nagy eltérés becslést annak valószínűségére, hogy a kutatás a BM pártot mutatja erősebbnek.

   Segítség: A p paraméterű Bernoulli eloszlás Cramér féle rátafüggvénye

   $$I(x) = x \ln \frac{(1-p)x}{p(1-x)} - \ln \frac{1-p}{1-x}.$$

   A λ paraméterű Poisson eloszlás Cramér féle rátafüggvénye

   $$I(x) = x \ln \frac{x}{\lambda} - x + \lambda.$$

   Megoldás: Legyen $n = 500$ és $i = 1, 2, \ldots, n$-re az X_i valószínűségi változó

   $$X_i = \begin{cases} 1, & \text{ha az } i\text{-edik megkézdezett BM-támogató} \\ 0, & \text{ha nem.} \end{cases}$$

   Az X_i-k függetlenek és $p = 0.3$ paraméterű Bernoulli eloszlásúak. Legyen $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ a megkérdezett BM-támogatók száma. A feladat a $\mathbb{P}(S_n > 250) = \mathbb{P}\left(\frac{S_n}{n} > \frac{1}{2}\right)$ valószínűség becslése.

   1. megoldás: A Cramér tételt alkalmazzuk a $p = 0.3$ paraméterű Bernoulli eloszlásra hogy megbecsüljük a $\mathbb{P}\left(\frac{S_n}{n} \in (a, b)\right)$ valószínűséget, ahol $a = \frac{1}{2}$ és $b = \infty$. A várható érték $m = p = 0.3$, ezért $m < a$, így

   $$\mathbb{P}\left(\frac{S_n}{n} > \frac{1}{2}\right) = \mathbb{P}\left(\frac{S_n}{n} \in (a, b)\right) \lessapprox e^{-nI(a)} = e^{-nI\left(\frac{1}{2}\right)}.$$

A segítségben megadott rátafüggvénybe behelyettesítve $x = \frac{1}{2}$-et

$$e^{-nI(\frac{1}{2})} = \exp\left[-n\left(\frac{1}{2}\ln\frac{(1-p)\frac{1}{2}}{p(1-\frac{1}{2})} - \ln\frac{1-p}{1-\frac{1}{2}}\right)\right] = \cdots = \sqrt{4pq}^{\,n}, \tag{1}$$

ahol $q = 1 - p$. Konkrétan $n = 500$, $p = 0.3$-ra

$$\mathbb{P}\left(\frac{S_n}{n} > \frac{1}{2}\right) \lessapprox \sqrt{4 \cdot 0.3 \cdot 0.7}^{500} \approx 1.17 \cdot 10^{-19}.$$

(Megjegyzés: persze nem szükséges az (1)-beli szép leegyszerűsített képletet kiszámolni vagy előadásról tudni – elég numerikusan behelyettesíteni $n = 500$, $x = 0.5$, $p = 0.3$-at.)

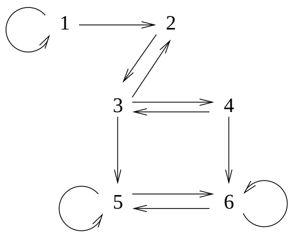
2. megoldás: Mivel az X_i-k korlátosak $0 = a_i \le X_i \le b_i = 1$ korlátokkal, használhatjuk a Hoeffding egyenlőtlenséget is. $\sum_{i=1}^{n}(b_i - a_i)^2 = 500 \cdot (1-0)^2 = 500$, valamint $\mathbb{E}S_n = np = 500 \cdot 0.3 = 150$, vagyis $t = 100$ választással

$$\mathbb{P}(S_n > 250) = \mathbb{P}(S_n > \mathbb{E}S_n + t) \le \exp\left(-\frac{2t^2}{\sum_{i=1}^{n}(b_i - a_i)^2}\right) = \exp\left(-\frac{2 \cdot 100^2}{500}\right) = e^{-40} \approx 4.25 \cdot 10^{-18}.$$

(Megjegyzés: látható, hogy a Hoeffding egyenlőtlenség durvább felső becslést ad, mint a Cramér tétel.)

3. Az ábrán látható gráf egy diszkrét idejű, időben homogén Markov lánc pozitív valószínűségű egylépéses átmeneteit mutatja. Osztályozzuk az állapotokat aszerint, hogy melyik melyikkel érintkezik! Minden osztályról állapítsuk meg, hogy

- zárt-e vagy nyílt,
- lényeges-e vagy lényegtelen,
- visszatérő-e vagy átmeneti,
- mennyi a periódusa.



Megoldás:

- Az {1} osztály nyílt, mert el lehet hagyni, tehát lényegtelen és átmeneti. Periódusa 1 (vagyis aperiodikus), mert 1 lépésben vissza lehet térni.
- A {2,3,4} osztály nyílt, mert el lehet hagyni, tehát lényegtelen és átmeneti. Periódusa 2, mert visszatérni csak páros sok lépésben lehet.
- Az {5,6} osztály zárt, mert el nem lehet elhagyni, tehát (véges méretű osztályról lévén szó) lényeges és visszatérő. Periódusa 1 (vagyis aperiodikus), mert akárhány lépésben vissza lehet térni.

4. Egy számítógépes program négy részfeladatból álló feladatokat old meg. Minden időegység végén feljegyezzük, hogy hanyadik részfeladaton dolgozik éppen – ha pedig éppen üresjáratban vár egy új feladatra, akkor 0-t – vagyis a program a $0, 1, 2, 3, 4$ állapotokban lehet. Az 1, 2, 3 és 4 részfeladatokról a program mindig, az előzményektől függetlenül $\frac{1}{2}$ valószínűséggel tud egy időegység alatt továbblépni a következő részfeladatra (úgy értve, hogy a 4 után a 0 jön), a maradék $\frac{1}{2}$ valószínűséggel ugyanazon dolgozik tovább. Ha a program a 0 üresjáratban van, akkor minden időegység alatt $\frac{1}{10}$ valószínűséggel kap feladatot és ugrik az 1 állapotba (az előzményektől függetlenül), ellenkező esetben marad üresjáratban. Modellezzük a program feljegyzett állapotainak sorozatát időben homogén Markov lánccal!

a.) Írjuk fel a P Markov átmenet-mátrixot.

b.) Feltéve, hogy kezdetben a program a 0 állapotban van, mi a valószínűsége a „0001223440” megfigyelés-sorozatnak? (A kezdőállapotot is feljegyezzük.)

c.) Feltéve, hogy a kezdőállapot a 0, mi a közelítő valószínűsége, hogy 1000 időegység után ismét a 0 állapotban van a program?

d.) Hosszú távon az idő hány százalékát tölti a program üresjáratban?

Megoldás:

a.) Az n idő elteltével felvett állapotot jelöljük X_n-nel. Az állapottér $S = \{0, 1, 2, 3, 4\}$. P sorait és oszlopait ilyen sorrendbe írva

$$P = \begin{pmatrix} \frac{9}{10} & \frac{1}{10} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

b.) $\mathbb{P}(X_0 \dots X_9 = 0001223440 | X_0 = 0) = P_{00} \cdot P_{00} \cdot P_{01} \cdot P_{12} \cdot P_{22} \cdot P_{23} \cdot P_{34} \cdot P_{44} \cdot P_{40} = \frac{9}{10} \cdot \frac{9}{10} \cdot \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{81}{64000}$.

c.) Az 1000 időegység elteltével kialakuló valószínűségeket közelítsük a Markov lánc stacionárius eloszlásával! Ehhez a $\pi P = \pi$ lineáris egyenletrendszert kell megoldani, ahol a π ötelemű sorvektor tartalmazza a stacionárius eloszlást. Átrendezés után $(P^T - \mathbb{I})\pi^T = \underline{0}$, ahol $\mathbb{I}$ az 5×5-ös egységmátrixot, $\underline{0}$ pedig az öt nullából álló oszlopvektort jelöli. A lineáris egyenletrendszerek szokásos mátrix-jelölésével

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} -0.1 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0 \\ 0.1 & -0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & -0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & -0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5 & -0.5 & 0 \end{array}\right).$$

Ezt persze eliminációval oldjuk meg. Egy sor kiesik, ahogy kell, és a végén (pl.) az marad, hogy

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} -1 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right).$$

vagyis az egyenletrendszer egyik megoldása az $\begin{pmatrix} 5 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^T$ vektor. A stacionárius eloszlás ennek valószínűségi vektorrá normált változata (ahol az elemek összege 1), vagyis

$$\pi = \begin{pmatrix} \frac{5}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} \end{pmatrix}.$$

Végül a feladat kérdésére a válasz:

$$\mathbb{P}(X_{1000} = 0 | X_0 = 0) \approx \pi_0 = \frac{5}{9}.$$

d.) Legyen $f : S \to \mathbb{R}$ a az üresjárat indikátora:

$$f(i) = \begin{cases} 1, & \text{ha } i = 0 \\ 0, & \text{ha nem} \end{cases},$$

ami helyett elég egy oszlopvektort leírni:

$$f = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Az ergodtétel szerint f időátlaga majdnem biztosan tart a stacionárius eloszlás szerinti sokaságátlaghoz. Sokféle különböző jelöléssel leírva ugyanazt:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(X_k) &= \int_S f\,\mathrm{d}\,\pi = \sum_{i\in S}\pi_i f(i) = \pi f = \begin{pmatrix}\pi_0 & \pi_1 & \pi_2\pi_3\pi_4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}\\ &= \pi_0 = \frac{5}{9}.\end{aligned}$$

5. Egy egyszerű jelfeldolgozó eszköz az egyes beérkező jeleket független, exponenciális eloszlású véletlen idők alatt dolgozza fel. A feldolgozási idő várható értéke 1 másodperc (vagyis $\frac{1}{60}$ perc). Amíg egy bejövő jel feldolgozása zajlik, addig az esetlegesen beérkező újabb jeleket az eszköz figyelmen kívül hagyja (vagyis nincs feldolgozási sor). A beérkező jelek Poisson folyamat szerint érkeznek, percenként átlagosan 2. Az eszköz így kétféle állapotban lehet: „szabad, passzív, jelre vár”, illetve „foglalt, feldolgozás folyamatban, nem figyel”.

   Modellezzük az eszköz állapotát folytonos idejű Markov lánccal. Az időt mérjük percben.

   a.) Írjuk fel a Markov lánc infinitezimális generátorát. Indokoljuk.

   b.) Az eszköz a működése első pillanatában szabad. Közelítőleg mennyi a valószínűsége, hogy tíz óra elteltével éppen foglalt lesz? Miért?

   c.) Az eszköz teljesítményfelvétele passzív állapotban $1W$, feldogozás során viszont $10W$. Mennyi az átlagos teljesítményfelvétel hosszú távon? Miért?

   Megoldás: Az állapotokat jelöljük számokkal: legyen $S = \{0, 1\}$ ahol 0 a passzív, 1 pedig az aktív állapot. Jelöljük a rendszer állapotát t idő elteltével X_t-vel. Mivel csak két állapot van, ugrani persze 0-ból csak 1-be, 1-ből pedig csak 0-ba lehet.

   a.) Az 1-ből 0-ba ugrás rátája $\lambda_{10} = 60$, mert a feldolgozással eltöltött idő várható értéke $\frac{1}{\lambda_1} = \frac{1}{\lambda_{10}} = \frac{1}{60}$. A 0-ból 1-be ugrás rátája $\lambda_{01} = 2$, mert ilyen rátájú Poisson folyamat szerint érkeznek a jelek. Ezek a λ_{ij}-k lesznek a G infinitezimális generátor főátlón kívüli elemei. A főátlót pedig úgy töltjük ki, hogy minden sorösszeg 0 legyen. Így
$$G = \begin{pmatrix}-2 & 2\\ 60 & -60\end{pmatrix}.$$

   b.) Mivel a Markov lánc véges állapotterű, irreducibilis és folytonos idejű, a Markov láncok alaptétele szerint hosszú idő elteltével az egyes állapotok valószínűségei tartanak a (z egyetlen) stacionárius eloszlás szerinti súlyokhoz. 10 óra azaz 600 perc pedig (ilyen ráták mellett) hosszú idő. Ezért keressük a $\pi = (\pi_0\ \pi_1)$ stacionárius eloszlást a $G^T\pi^T = 0$ lineáris egyenletrendszer megoldásával:
$$\begin{pmatrix}-2 & 60\\ 2 & -60\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\pi_0\\ \pi_1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix},$$
avagy a lineáris algebrában szokásos tömör jelöléssel
$$\left(\begin{array}{cc|c}-2 & 60 & 0\\ 2 & -60 & 0\end{array}\right).$$
A két egyenlet egymásnak -1-szerese, így elég mondjuk az elsőt nézni: $-2\pi_0 + 60\pi_1 = 0$, amiből $\pi_0 = 30\pi_1$. Például $\pi_1 = 1$ választással is megkapjuk az egyenletrendszer egy lehetséges megoldását: $\tilde{\pi} = (30\ 1)$. A keresett stacionárius eloszlás ennek olyan konstansszorosa, amiben az elemek összege 1:
$$\pi = \begin{pmatrix}\frac{30}{31} & \frac{1}{31}\end{pmatrix}.$$
A Markov láncok alaptétele szerint tehát $\mathbb{P}(X_{600} = 1) \approx \pi_1 = \frac{1}{31} \approx 0.0323$.

c.) A pillanatnyi teljesítményfelvétel a t időpontban $f(X_t)$, ahol az $f : S \to \mathbb{R}$ megfigyelhető mennyiség olyan, hogy $f(0) = 1$ és $f(1) = 10$. Ezt célszerű oszlopvektorként írni:

$$f = \begin{pmatrix} 1 \\ 10 \end{pmatrix}.$$

Mivel a Markov lánc véges állapotterű és irreducibilis, az ergodtétel értelmében $f(X_t)$ időátlaga hosszú távon (1 valószínűséggel) tart az egyetlen π stacionárius eloszlás szerinti várható értékhez:

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int\limits_0^T f(X_t)\mathrm{d}\,t = \sum_{i\in S} \pi_i f(i) = \pi f = \begin{pmatrix} \frac{30}{31} & \frac{1}{31} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 10 \end{pmatrix} = \frac{30}{31} \cdot 1 + \frac{1}{31} \cdot 10 = \frac{40}{31} \approx 1.29.$$