Sztochasztika 2 félvizsga

Felsőbb matematika informatikusoknak – Sztochasztika

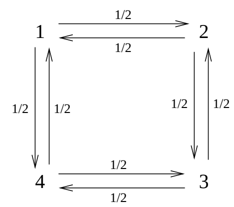
2017. január 10. 09:00. Munkaidő: 90 perc. Minden feladat 5 pontot ér.

1. Egy pohárban hat szabályos dobókockát összerázunk, majd az egészet az asztalra borítjuk. Igen ám, de minden kocka – a többitől függetlenül – $\frac{1}{3}$ valószínűséggel leesik a földre, és csak $\frac{2}{3}$ valószínűséggel marad az asztalon. Jelöljük X-szel az asztalon maradt kockákon kijött számok összegét. Mennyi X várható értéke és mi a generátorfüggvénye?

2. Móricka elhatározza, hogy addig dobál egy dobókockát, amíg 1000-szer ki nem jön neki a hatos. (Persze nem feltétlenül kell az 1000 hatosnak egymás után kijönni.) Valamelyik nagy eltérés tétel segítségével becsüljük meg annak a valószínűségét, hogy ez legfeljebb 5000 dobásból sikerül neki.

   (Segítség: a p paraméterű Bernoulli eloszlás Cramér féle rátafüggvénye
$$I(x) = x\ln\left(\frac{x}{1-x}\frac{1-p}{p}\right) + \ln\left(\frac{1-x}{1-p}\right)$$
   (ha $0 < x < 1$). A p paraméterű (optimista) geometriai eloszlás Cramér féle rátafüggvénye
$$I(x) = x\ln\left(\frac{x-1}{x}\frac{1}{1-p}\right) + \ln\left(\frac{1}{p}\frac{1-p}{x-1}\right)$$
   (ha $x > 1$).)

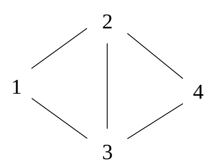
3. Az alábbi ábra egy diszkrét idejű (időben homogén) Markov lánc lehetséges egylépéses átmeneteit mutatja, a hozzájuk tartozó átmenetvalószínűségekkel együtt.



   a.) Írjuk fel a Markov lánc állapotterét és átmenetmátrixát!

   b.) Ha a Markov lánc kezdetben a 2 állapotban van, mi a valószínűsége, hogy 100 lépés után a 3 állapotban találjuk?

4. Egy bolha az ábrán látható gráf csúcsain bolyong úgy, hogy minden egész másodpercben átugrik egy, az aktuális helyével szomszédos csúcsra, az előzményektől függetlenül, egyenletes eloszlás szerint választva.



   Modellezzük a bolyongást Markov lánccal.

   a.) Keressük meg a stacionárius eloszlást!

   b.) Hosszú távon az idő hány százalékát tölti a bolha a 2-es és 3-as pontok valamelyikén? Miért?

5. Egy lépcsőházban Poisson folyamat szerinti véletlen időpontokban, havonta átlagosan egyszer megjelenik a gondnok, és ellenőrzi az egyetlen villanykörtét: ha kiégett, kicseréli. A villanykörte pedig exponenciális eloszlású véletlen idő elteltével kiég – a várható élettartama 1 év. Modellezzük a körte állapotát folytonos idejű Markov lánccal. Az időt mérjük években.

   a.) Írjuk fel a Markov lánc infinitezimális generátorát!

   b.) Ma reggel nyolckor a körte ki volt égve. Közelítőleg mennyi a valószínűsége, hogy holnap reggel nyolckor a lámpa működni fog?

   c.) Közelítőleg mennyi a valószínűsége, hogy pont 20 év elteltével a lámpa működni fog?

   d.) Közelítőleg mennyi a valószínűsége, hogy a lámpa 2027 januárjában végig működni fog?