Info MSc Mat AD pótpót ZH 2013.12.19 2013 ősz 1/2 Mogy

① Jelölések eseményekre:

A: szabályos kockával dobunk
B: az 1. cinkelt kockával dobunk, ahol $\mathbb{P}(6\text{-os}) = \frac{1}{2}$
C: a 2. $\sim$ $\frac{1}{10}$

ezekre $\mathbb{P}(A)=\mathbb{P}(B)=\mathbb{P}(C)=\frac{1}{3}$

~~Az „A" feltétel mel~~

X: = a szükséges dobások száma.

Az A feltétel mellett $X \sim \text{Geom}\left(\frac{1}{6}\right)$
B $\sim$ $\frac{1}{2}$
C $\sim$ $\frac{1}{10}$

vagyis $E(X|A)=6$
$E(X|B)=2$
$E(X|C)=10$

A teljes várható érték tétel szerint pedig

$$\boxed{EX = \mathbb{P}(A)E(X|A)+\mathbb{P}(B)E(X|B)+\mathbb{P}(C)E(X|C) = \frac{1}{3}\cdot 6+\frac{1}{3}\cdot 2+\frac{1}{3}\cdot 10 = 6}$$

② A személyautók és a teherautók érkezési időpontjai független Poisson-folyamatok. A gyorshajtó személy ill. teherautók érk. időpontjai ezek ritkításai, így ezek is független Poisson-folyamatok, ezért ezek uniója – az összes gyorshajtó – is Poi-folyamat. Rátája (ha az időt percben mérjük)

$$\lambda_{\text{összes gyorshajtó}} = \lambda_{\text{gyorsh. személy}} + \lambda_{\text{gyorsh-teher}} = \frac{1}{4}\cdot\lambda_{\text{személy}} + \frac{1}{8}\lambda_{\text{teher}} = \frac{1}{4}\cdot 5+\frac{1}{8}\cdot 2 = 1{,}5$$

Így a $t=0$ és $t=2$ között érkező gyorshajtók száma $=: X$ eloszlása $X \sim \text{Poi}(\Delta t\cdot\lambda_{\text{összes gyorshajtó}}) = \text{Poi}(2\cdot 1{,}5) = \text{Poi}(3)$,

vagyis $\mathbb{P}(X=k) = e^{-3}\frac{3^k}{k!}$ $k=0,1,2,\dots$

Válasz a kérdésre:

$$\boxed{\mathbb{P}(X\geq 3)} = 1-[\mathbb{P}(X=0)+\mathbb{P}(X=1)+\mathbb{P}(X=2)] = 1-\Big[e^{-3}\underbrace{\frac{3^0}{0!}}_{1}+e^{-3}\underbrace{\frac{3^1}{1!}}_{3}+e^{-3}\underbrace{\frac{3^2}{2!}}_{9/2}\Big] = \boxed{1-\frac{17}{2}e^{-3}}$$

Villamos MSc Mat „Sztochasztika” pótpót ZH 2013 ősz, 2013.12.18 -2/2- Megy
Info MSc 2013.12.19

3) a.)

$$g_X(z) = E(z^X) = P(\text{azonnal lob.})\cdot E(z^X \mid \text{azonnal lob.}) + P(\text{nem az.})\, E(z^X \mid \text{nem az.}) =$$

$$= \frac{99}{100}\cdot z^0 + \frac{1}{100}\, g_{P\text{Geom}(\frac{1}{100})}(z) = \frac{99}{100} + \frac{1}{100}\cdot\frac{1/100}{1-\frac{99}{100}z} =$$

$$\boxed{g_X(z) = \frac{1}{100}\left[99 + \frac{1}{100-99z}\right]}$$

b.)

$$m := EX = P(\text{azonnal lob.})\, E(X \mid \text{azonnal lob.}) + P(\text{nem az.})\, E(X \mid \text{nem az.}) =$$

$$= \frac{99}{100}\cdot 0 + \frac{1}{100}\, E\left(P\text{Geom}\left(\frac{1}{100}\right)\right) = 0 + \frac{1}{100}\left[\frac{1}{1/100} - 1\right] = \frac{99}{100}$$

$$\boxed{m = EX = \frac{99}{100}}$$

c.) Legyen Z_n az n-edik generáció elemszáma. Z_n elágazó folyamat, így

$$P(Z_2 = 0) = g(g(0)). \quad \text{Ehhez} \quad g(0) = \frac{1}{100}\left[99 + \frac{1}{100-0}\right] = 0.9901$$

$$g(g(0)) = \frac{1}{100}\left[99 + \frac{1}{100-99\cdot 0.9901}\right] \approx \underline{\underline{0.995}}$$

d.) $m<1$, vagyis a folyamat szubkritikus $\Rightarrow \boxed{P(\text{kihalás}) = 1}$

e.) $N := Z_0 + Z_1 + Z_2 + \dots$ az összes fertőzött gép száma.

$m<1$, ezért $\boxed{EN = \frac{1}{1-m} = \frac{1}{1-\frac{99}{100}} = 100}$