**Felsőbb Matematika Informatikusoknak – Sztochasztika**
**házi feladatok a 2. részhez**
2015 tavasz

Minden héten összesen egy pontot érnek a kitűzött feladatok.

**4.HF:** (Beadási határidő: 2015.05.05.)

HF 4.1 Egy sort kiszolgáló számítógép a hozzá érkező, sorra kerülő feladatokat pontosan egységnyi idő alatt végzi el. Ezen időegység alatt azonban újabb feladat(ok) érkez(het)nek, melyek száma véletlen, és az előzményektől független. Ezek a feladatok beállnak a sorba, és ott várakoznak, amíg az előttük érkezett feladatokat a gép el nem végzi. Az egy időegység alatt érkező új feladatok számának eloszlása:

| $k$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| $P(k \text{ igény})$ | $4/10$ | $p$ | $5/10-p$ | $1/10$ |

A sor kezdetben üres, az első feladat érkezésének pillanatában kezdjük az időt mérni. Nevezzük a feladatok „nulladik generációjának" a legelőször érkezett feladatot. Nevezzük „első generációnak" azokat a feladatokat, amik az ő elvégzése alatt érkeznek. Nevezzük „második generációnak" azokat a feladatokat, amik az első generációba tartozó feladatok elvégzése alatt érkeznek, stb ... Nevezzük „(n+1)-edik generációnak" azokat a feladatokat, amik az n-edik generációba tartozó feladatok elvégzése alatt érkeznek. Jelölje $Z_n$ az $n$-edik generáció elemszámát, $n = 0, 1, 2, \ldots$. Válaszoljuk meg az alábbi kérdéseket

I. ha $p = 4/10$,
II. ha $p = 2/10$.

a.) Mennyi $Z_1$ várható értéke?
b.) Mi $Z_1$ generátorfüggvénye?
c.) Mi $Z_2$ generátorfüggvénye?
d.) Mennyi $Z_{72}$ várható értéke?
e.) Mennyi az $r_3 := \mathbb{P}(Z_3 = 0)$ valószínűség?
f.) Mennyi annak a valószínűsége, hogy a sor előbb-utóbb újra üres lesz? *(Segítség: egy harmadfokú egyenletet könnyű megoldani, ha ismerjük az egyik gyökét.)*
g.) Mennyi a foglaltsági periódus hosszának várható értéke? (A foglaltsági periódus az a véletlen időszak, aminek a végén először lesz a sor újra üres.)

**Megoldás:** $Z_n$ Galton-Watson elágazó folyamat, amire $Z_0 = 1$ és az egylépéses utódszám-eloszlás éppen a feladatban szereplő táblázatban megadott eloszlás. A kérdések megválaszolásához ennek $m$ várható értékére és $g(z)$ generátorfüggvényére lesz szükség:

I. ha $p = 4/10$, akkor $g(z) = \frac{4}{10} \cdot z^0 + \frac{4}{10} \cdot z^1 + \frac{1}{10} \cdot z^2 + \frac{1}{10} \cdot z^3 = \frac{4+4z+z^2+z^3}{10}$, $m = \frac{4}{10} \cdot 0 + \frac{4}{10} \cdot 1 + \frac{1}{10} \cdot 2 + \frac{1}{10} \cdot 3 = \frac{9}{10} < 1$, a folyamat szubkritikus.
II. ha $p = 2/10$, akkor $g(z) = \frac{4}{10} \cdot z^0 + \frac{2}{10} \cdot z^1 + \frac{3}{10} \cdot z^2 + \frac{1}{10} \cdot z^3 = \frac{4+2z+3z^2+z^3}{10}$, $m = \frac{4}{10} \cdot 0 + \frac{2}{10} \cdot 1 + \frac{3}{10} \cdot 2 + \frac{1}{10} \cdot 3 = \frac{11}{10} > 1$, a folyamat szuperkritikus.

Ezek alapján, a szokásos jelölésekkel

I. ha $p = 4/10$,
   a.) $\mathbf{E}Z_1 = m = \frac{9}{10}$
   b.) $Z_1$ generátorfüggvénye $g_1(z) = g(z) = \frac{4+4z+z^2+z^3}{10}$

c.) $Z_2$ generátorfüggvénye

$$\begin{aligned} g_2(z) &= g(g(z)) = g\left(\frac{4+4z+z^2+z^3}{10}\right) = \\ &= \frac{4+4\left(\frac{4+4z+z^2+z^3}{10}\right)+\left(\frac{4+4z+z^2+z^3}{10}\right)^2+\left(\frac{4+4z+z^2+z^3}{10}\right)^3}{10} \end{aligned}$$

d.) $\mathbf{E}Z_{72} = m_{72} = m^{72} = \left(\frac{9}{10}\right)^{72} \approx 0.000507$

e.) Az $r_n := \mathbb{P}(Z_n = 0)$ jelöléssel

* $r_0 = 0$
* $r_1 = g(r_0) = g(0) = \frac{4}{10}$
* $r_2 = g(r_1) = g\left(\frac{4}{10}\right) = 0.5824$
* $r_3 = g(r_2) = g(0.5824) \approx 0.68663$

f.) $\mathbb{P}$(a sor előbb-utóbb újra üres lesz) $= \mathbb{P}$(kihalás) $= r_\infty = 1$, mert a folyamat szubkritikus.

g.) A foglaltsági periódus hossza éppen $N := \sum_{n=0}^{\infty} Z_n$, amire $\mathbf{E}N = \frac{1}{1-m} = 10$ (mert $m < 1$).

II. ha $p = 2/10$,

a.) $\mathbf{E}Z_1 = m = \frac{11}{10}$

b.) $Z_1$ generátorfüggvénye $g_1(z) = g(z) = \frac{4+2z+3z^2+z^3}{10}$

c.) $Z_2$ generátorfüggvénye

$$\begin{aligned} g_2(z) &= g(g(z)) = g\left(\frac{4+2z+3z^2+z^3}{10}\right) = \\ &= \frac{4+2\left(\frac{4+2z+3z^2+z^3}{10}\right)+3\left(\frac{4+2z+3z^2+z^3}{10}\right)^2+\left(\frac{4+2z+3z^2+z^3}{10}\right)^3}{10} \end{aligned}$$

d.) $\mathbf{E}Z_{72} = m_{72} = m^{72} = \left(\frac{11}{10}\right)^{72} \approx 995.59$

e.) Az $r_n := \mathbb{P}(Z_n = 0)$ jelöléssel

* $r_0 = 0$
* $r_1 = g(r_0) = g(0) = \frac{4}{10}$
* $r_2 = g(r_1) = g\left(\frac{4}{10}\right) = 0.5344$
* $r_3 = g(r_2) = g(0.5344) \approx 0.60782$

f.) A kérdés $\mathbb{P}$(a sor előbb-utóbb újra üres lesz) $= \mathbb{P}$(kihalás) $= r_\infty$. Mivel a folyamat szuperkritikus, tudjuk, hogy $r_\infty < 1$ és számolni kell: meg kell oldani a $g(z) = z$ egyenletet. Esetünkben az egyenlet

$$\frac{4+2z+3z^2+z^3}{10} = z,$$

átszorozva és nullára redukálva

$$z^3 + 3z^2 - 8z + 4 = 0.$$

Ez egy harmadfokú egyenlet, de szerencsére tudjuk, hogy $z = 1$ mindig gyöke, vagyis a baloldali polinomból ki lehet emelni a $(z-1)$ gyöktényezőt. Valóban,

$$z^3 + 3z^2 - 8z + 4 = (z-1)(z^2 + 4z - 4),$$

amit az egyenletbe visszaírva

$$(z-1)(z^2+4z-4)=0.$$

Mivel mi NEM a $z=1$ megoldást keressük, nyogodtan vévgig lehet osztani $(z-1)$-gyel, és marad, hogy

$$z^2+4z-4=0,$$

ami már másodfokú. A megoldásai

$$z=\frac{-4\pm\sqrt{(-4)^2-4\cdot 1\cdot(-4)}}{2}=\frac{-4\pm\sqrt{32}}{2}=-2(1\pm\sqrt{2}),$$

vagyis a gyökök $z=-2(1-\sqrt{2})\approx -4.4$ és $z=-2(1-\sqrt{2})\approx 0.8284$. Mi az egyetlen $[0,1)$-beli megoldást keressük, vagyis

$$\mathbb{P}(\text{kihalás})=r_\infty=2(\sqrt{2}-1)\approx 0.8284$$

g.) A foglaltsági periódus hossza éppen $N:=\sum_{n=0}^{\infty} Z_n$, amire $\mathbf{E}N=\infty$, mert $m>1$.