3.1

- $\{1,2,3\}$ nyílt, lényegtelen, átmeneti, periódusa 3
- $\{4,7,8,9\}$ nyílt, lényegtelen, átmeneti, periódusa $\text{lnko}\{3,4,\dots\}=1$
- $\{5,6\}$ zárt, lényeges, visszatérő, periódusa 1

3.2

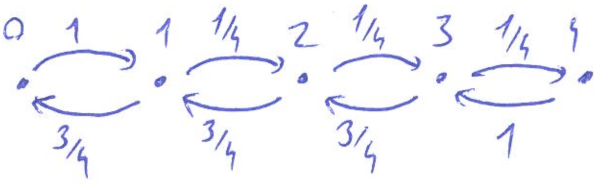
a.) Két lehetséges útvonal van: $0\to1\to0\to1\to0$, illetve $0\to1\to2\to1\to0$. Ennek megfelelően

$$P(X_4=0\mid X_0=0)=P_{01}P_{10}P_{01}P_{10}+P_{01}P_{12}P_{21}P_{10}=1\cdot\frac{3}{4}\cdot1\cdot\frac{3}{4}+1\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4}=$$

$$=\frac{45}{64}\approx0.703$$

b.) Öt lépésben nem lehet visszajutni, ezért $P(X_5=0\mid X_0=0)=0$

c.) $S=\{0,1,2,3,4\}$, a gráf-reprezentáció



d.) Az átmenetmátrix

$$P=\begin{pmatrix}0&1&0&0&0\\ 3/4&0&1/4&0&0\\ 0&3/4&0&1/4&0\\ 0&0&3/4&0&1/4\\ 0&0&0&1&0\end{pmatrix}$$

e.) A $(P^T-\mathbb{1})\pi^T=0$ lineáris egyenletrendszer megoldását keressük:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c}-1&3/4&0&0&0&0\\ 1&-1&3/4&0&0&0\\ 0&1/4&-1&3/4&0&0\\ 0&0&1/4&-1&1&0\\ 0&0&0&1/4&-1&0\end{array}\right)\ \underset{\text{elimináció}}{\sim}\ \left(\begin{array}{ccccc|c}-1&3/4&0&0&0&0\\ 0&-1/4&3/4&0&0&0\\ 0&0&-1/4&3/4&0&0\\ 0&0&0&-1/4&1&0\\ \cancel{0}&\cancel{0}&\cancel{0}&\cancel{1/4}&\cancel{-1}&\cancel{0}\end{array}\right)\Rightarrow\boxed{\begin{aligned}\pi_0&=\frac{4}{3}\pi_1\\ \pi_1&=3\pi_2\\ \pi_2&=3\pi_3\\ \pi_3&=4\pi_4\end{aligned}}\quad (*)$$

$\boxed{3.2}$ e.) folytatás

Innen az egyetlen stac. eloszlás

$$\boxed{\Pi = \text{const}\cdot\begin{pmatrix}27 & 36 & 12 & 4 & 1\end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix}\frac{27}{80} & \frac{36}{80} & \frac{12}{80} & \frac{4}{80} & \frac{1}{80}\end{pmatrix}}}$$

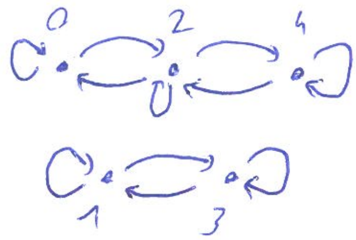
[Megj: A ⊛-os egyenlőségek közvetlenül is leolvashatók a gráf-reprezentációból, mivel X_n születési–halálozási folyamat:

$$\Pi_i \cdot P_{i,i+1} = \Pi_{i+1}\cdot P_{i+1,i}$$]

f.) A Markov lánc periodikus, így a Markov láncok alaptétele közvetlenül nem alkalmazható. Viszont ha csak minden 2. csettintés után nézünk a sorra, vagyis az $Y_n := X_{2n}$ Markov láncot tekintjük, akkor ennek átmenetmátrixa

$$Q = P^2 = \begin{pmatrix}\boxed{3/4} & 0 & \boxed{\frac{1}{4}} & 0 & \boxed{0}\\ 0 & \frac{15}{16} & 0 & \frac{1}{16} & 0\\ \boxed{\frac{9}{16}} & 0 & \boxed{\frac{6}{16}} & 0 & \boxed{\frac{1}{16}}\\ 0 & \frac{9}{16} & 0 & \frac{7}{16} & 0\\ \boxed{0} & 0 & \boxed{\frac{3}{4}} & 0 & \boxed{\frac{1}{4}}\end{pmatrix},$$

gráf-reprezentációja



Vagyis ez $\boxed{\text{reducibilis}}$, viszont a $\{0, 2, 4\}$ osztályra megszorítva már irreducibilis és aperiodikus:

$$\tilde{Q} = \begin{pmatrix}3/4 & 1/4 & 0\\ 9/16 & 6/16 & 1/16\\ 0 & 3/4 & 1/4\end{pmatrix}$$

Ennek stac. eloszlása

$$\tilde{\Pi} = \underbrace{\begin{pmatrix}\frac{27}{40} & \frac{12}{40} & \frac{1}{40}\end{pmatrix}}$$

(Jó, hogy hasonlít a Π-re !!)

És az alaptétel alkalmazható: $\boxed{\mathbb{P}(Y_{50}=0 \mid Y_0=0)} \approx \tilde{\Pi}_0 = \frac{27}{40} = \boxed{0.675}$