Felsőbb Matematika Informatikusoknak – Sztochasztika
házi feladatok a 2. részhez
2015 ősz

Minden héten összesen egy pontot érnek a kitűzött feladatok.

1.HF: (Beadási határidő: 2015.11.09.)

HF 1.1 Egy számítógépes hálózati kiszolgálóhoz Poisson folyamat szerint érkeznek az igények, percenként átlagosan tíz. Minden igény kiszolgálása során $\frac{1}{10}$ valószínűséggel történik valamilyen hiba, az előzményektől függetlenül.

a.) Mennyi annak a valószínűsége, hogy egy perc alatt (mondjuk 08:00-tól 08:01-ig) 5-nél kevesebb igény érkezik?

b.) Mennyi annak a valószínűsége, hogy 08:00-tól 09:00-ig pontosan 2 hiba történik?

c.) Mennyi annak a valószínűsége, hogy 08:00-tól 08:01-ig legalább 5 igény érkezik, de egy hiba sem történik? (*Vigyázat: Az igények száma és a hibák száma nem független! Tipp: a hibát nem okozó igények száma viszont független a hibák számától. Miért is?*

2.HF: (Beadási határidő: 2015.11.30.)

HF 2.1 **Második verzió egy sajtóhiba javítása után - bocs.** Legyenek $X_1, X_2, \ldots$ független, de *nem azonos eloszlású* valószínűségi változók. Konkrétan minden k-ra legyenek X_k lehetséges értékei -1 és $k^2 - 1$ a következő valószínűségekkel:

$$\mathbb{P}(X_k = k^2 - 1) = \frac{1}{k^2} \quad , \quad \mathbb{P}(X_k = -1) = 1 - \frac{1}{k^2}.$$

Legyen $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$.

a.) Mennyi X_k és S_n várható értéke?

b.) Mutassuk meg, hogy 1 valószínűséggel $\frac{S_n}{n} \to -1$. *(Tipp: használjuk valamelyik Borel-Cantelli lemmát.)*

HF 2.2 a.) Legyenek $X_1, X_2, \ldots$ független valószínűségi változók 1 paraméterű exponenciális eloszlással. Legyen $M_n = \max\{X_1, \ldots, X_n\}$. Számoljuk ki M_n eloszlásfüggvényét. *(Tipp: valahány szám maximuma akkor kisebb x-nél, ha mindegyik szám kisebb x-nél :))*

b.) Legyen $Y_n := M_n - \ln n$. Számoljuk ki Y_n eloszlásfüggvényét.

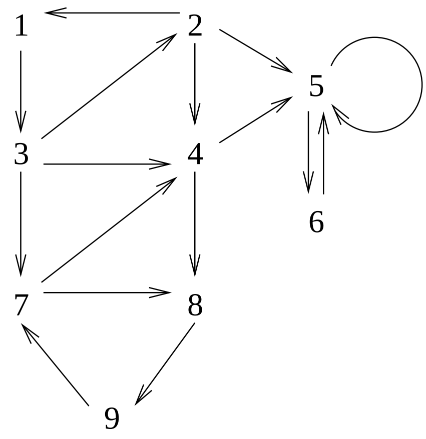
c.) A gyenge konvergencia eloszlásfüggvényes definíciójával mutassuk meg, hogy az Y_n sorozat gyengén konvergens, és adjuk meg a határeloszlás eloszlásfüggvényét. *(Tipp: $e^{-\ln n} = \frac{1}{n}$ és $\lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{c}{n}\right)^n = e^{-c}$.)*

d.) Móricka vesz a boltban egy $n = 5184705528587072464087$ atommagból álló mintát. A magok mindegyike $T_{1/2} = 0.693$ óra felezési idővel bomlik. Számoljuk ki annak a közelítő valószínűségét, hogy 51 óra elteltével Mórickának még mindig megvan elbomlatlanul legalább egy atommagja. *(Tipp: $n \approx e^{50}$ és $T \approx \ln(2)$.)*

3.HF: (Beadási határidő: 2015.12.07.)

HF 3.1 Az 1. ábrán látható gráf egy diszkrét idejű, időben homogén Markov lánc pozitív valószínűségű egylépéses átmeneteit mutatja. Osztályozzuk az állapotokat aszerint, hogy melyik melyikkel érintkezik! Minden osztályról állapítsuk megy, hogy

* zárt-e vagy nyílt,
* lényeges-e vagy lényegtelen,



1. ábra. Markov lánc gráf-reprezentációja (valószínűségek nélkül)

* visszatérő-e vagy átmeneti,
* mennyi a periódusa.

HF 3.2 Egy fagyisnál a sorban álló gyerekek száma 0 és 4 között változhat (beleértve az éppen kiszolgálás alatt állót is): ha már 4-en vannak, és egy újabb gyerek be akarna állni, az apukája elrángatja. A fagyis bácsi nagyon igyekszik, de mindig csak $\frac{3}{4}$ valószínűséggel sikerül egy gyereket kiszolgálnia azelőtt, hogy egy újabb érkezne – az előzményektől függetlenül. Kivétel ez alól, ha 4-en vannak, mert akkor persze biztosan sikerül (új gyerek nem tud jönni), illetve ha a sor üres, mert akkor nincs is kit kiszolgálni.

Tekintsük a sorban állók számát *diszkrét időben*: a fagyis bácsi csettint egyet, valahányszor egy gyerek *érkezik vagy elmegy*, vagyis valahányszor a sor hossza változik. A sor hossza mindig pontosan 1-gyel változik (egyszerre csak 1 gyerek tud érkezni és elmenni is), és a fentiek szerint $\frac{3}{4}$ valószínűséggel csökken, a maradék $\frac{1}{4}$ valószínűséggel pedig nő, az előzményektől függetlenül (kivéve ha 4 vagy 0).

Legyen X_n a sor hossza az n-edik csettintés után (vagyis az n-edik sorhossz-változás után).

a.) Kezdetben a sor üres. Mennyi a valószínűsége, hogy 4 lépés után ismét üres?

b.) Kezdetben a sor üres. Mennyi a valószínűsége, hogy 5 lépés után ismét üres?

c.) Adjuk meg az X_n Markov lánc állapotterét és rajzoljuk fel a gráf-reprezentációját!

d.) Adjuk meg az X_n Markov lánc átmenetmátrixát!

e.) Keressük meg a Markov lánc stacionárius eloszlásait!

f.) Kezdetben a sor üres. Körülbelül mekkora a valószínűsége, hogy 100 lépés után ismét üres? *(Vigyázat: a feladat cseles, és az erre való tétel csak óvatosan alkalmazható. Egy hibásan alkalmazott tételnél jobb, ha precíz indoklás nélkül megsejtjük a helyes eredményt.)*

g.) **Bónusz kérdés:** Mi a válasz az előző kérdésre, ha a sor hosszára nincs felső korlát?