Felsőbb Matematika Informatikusoknak – Sztochasztika
házi feladatok a 2. részhez
2015 tavasz

Minden héten összesen egy pontot érnek a kitűzött feladatok.

1.HF: (Beadási határidő: 2015.04.10.)

HF 1.1 Egy radioaktív sugárforrás nagyon sok bomlásra képes atommagból áll, melyek mindegyike valamilyen kis valószínűséggel bomlik el éppen az általunk megfigyelt időintervallumban (és bocsát ki észlelhető sugárzást), a többi atommagtól függetlenül. A minta aktivitása $0.1Bq$ (vagyis Becquerel), ami azt jelenti, hogy másodpercenként átlagosan 0.1 bomlás történik.

a.) Legyen X az egy perc alatt (mondjuk 08:00-tól 08:01-ig) történő bomlások száma. Milyen eloszlással jó ezt modellezni? Vagyis mennyi a $\mathbb{P}(X = k)$ valószínűség (és melyik k-kra)?

b.) Mennyi annak a valószínűsége, hogy 08:00-tól 08:01-ig pontosan 4 bomlás történik, 08:01-től 08:03-ig pedig pontosan 10?

c.) Mennyi annak a valószínűsége, hogy 09:00-tól a következő bomlásig legalább 10 másodpercet kell várni?

2.HF: (Beadási határidő: 2015.04.17.)

HF 2.1 Legyenek $X_1, X_2, \dots$ független valószínűségi változók, melyek eloszlása egyenletes a $[0, 1]$ intervallumon. Legyen

$$M_n = \max\{X_1, \dots, X_n\}$$

és legyen F_n az M_n eloszlásfüggvénye, vagyis $F_n(x) := \mathbb{P}(M_n < x)$.

a.) Számoljuk ki az F_n eloszlásfüggvényt. *Segítség: az $\{X_1, \dots, X_n\}$ maximuma persze pontosan akkor kisebb x-nél, ha minden X_i külön-külön kisebb x-nél.*

b.) Legyen $Y_n = n(1 - M_n)$ és legyen G_n az Y_n eloszlásfüggvénye. Számoljuk ki a G_n eloszlásfüggvényt. *Segítség:* $\mathbb{P}(Y_n < y) = \mathbb{P}(n(1 - M_n) < y) = \mathbb{P}(M_n > 1 - \frac{y}{n})$.

c.) Számoljuk ki a $G(y) := \lim_{n\to\infty} G_n(y)$ határértéket.

d.) A valószínűségi változók gyenge konvergenciájának eloszlásfüggvényes definíciója alapján mutassuk meg, hogy az Y_n sorozat gyengén konvergens, és nevezzük meg a határeloszlást.

HF 2.2 Egy béka egy hosszú lépcsősoron ugrál felfelé, de egyre fárad: annak valószínűsége, hogy az n-edik ugrással sikerül egy lépcsővel feljebb kerülnie, p_n a korábbi ugrásoktól függetlenül, és sajnos p_n csökken. Mennyi a valószínűsége, hogy kitartóan próbálkozva mégis akármilyen magasra feljut, ha

a.) $p_n = \frac{1}{n^2}$

b.) $p_n = \frac{1}{n}$

Segítség: használjuk a Borel-Cantelli lemmákat.

3.HF: (Beadási határidő: 2015.04.24.)

HF 3.1 a.) Amint azt órán kiszámoltuk, a standard normális eloszlás karakterisztikus függvénye $\Psi_{\mathcal{N}(0,1)}(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}$. Ennek alapján számoljuk ki egy tetszőleges $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ normális eloszlás karakterisztikus függvényét. *(Segítség: Használjuk ki, hogy ha $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$ és $Y = m + \sigma X$, akkor $Y \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$. Használjuk továbbá a karakterisztikus függvény definícióját: $\Psi_{\mathcal{N}(0,1)}(t) = \Psi_X(t) := \mathbf{E}(e^{itX})$ és $\Psi_{\mathcal{N}(m,\sigma^2)}(t) = \Psi_Y(t) := \mathbf{E}(e^{itY})$.)*

b.) Legyenek U és V független normális eloszlású valószínűségi változók: $U \sim \mathcal{N}(m_1, \sigma_1^2)$, $V \sim \mathcal{N}(m_2, \sigma_2^2)$. Legyen $Z = X + Y$. Számoljuk ki Z karakterisztikus függvényét, és ebből mondjuk meg Z eloszlását! *(Segítség: Használjuk ki, hogy független X-re és Y-ra $\Psi_{X+Y}(t) = \Psi_X(t) \cdot \Psi_Y(t)$, és hogy a karakterisztikus függvény egyértelműen meghatározza az eloszlást.)*

HF 3.2 a.) Legyen az X valószínűségi változó pesszimista geometriai eloszlású $p \in (0, 1)$ paraméterrel, vagyis $\mathbb{P}(X = k) = q^k p$ $(k = 0, 1, \dots)$, ahol $q := 1 - p$. Számoljuk ki X generátorfüggvényét – vagyis a $g_X(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(X = k) z^k$ függvényt. *(Segítség: $\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$, ha $-1 < x < 1$.)*

b.) Egy Y nemnegatív egész értékű valószínűségi változó generátorfüggvénye $g_Y(z) = \frac{2+3z+4z^3+z^7}{10}$. Határozzuk meg ebből Y eloszlását, vagyis hogy melyik $k \in \mathbb{N}$ értéket mekkora valószínűséggel veszi fel. *(Segítség: ezt a generátorfüggvényt könnyen fel lehet írni $g_Y(z) = \sum_k p_k z^k$ alakban.)*

4.HF: (Beadási határidő: 2015.05.05.)

HF 4.1 Egy sort kiszolgáló számítógép a hozzá érkező, sorra kerülő feladatokat pontosan egységnyi idő alatt végzi el. Ezen időegység alatt azonban újabb feladat(ok) érkez(het)nek, melyek száma véletlen, és az előzményektől független. Ezek a feladatok beállnak a sorba, és ott várakoznak, amíg az előttük érkezett feladatokat a gép el nem végzi. Az egy időegység alatt érkező új feladatok számának eloszlása:

k	0	1	2	3
$P(k \text{ igény})$	$4/10$	p	$5/10 - p$	$1/10$

A sor kezdetben üres, az első feladat érkezésének pillanatában kezdjük az időt mérni. Nevezzük a feladatok „nulladik generációjának” a legelőször érkezett feladatot. Nevezzük „első generációnak” azokat a feladatokat, amik az ő elvégzése alatt érkeznek. Nevezzük „második generációnak” azokat a feladatokat, amik az első generációba tartozó feladatok elvégzése alatt érkeznek, stb ... Nevezzük „(n+1)-edik generációnak” azokat a feladatokat, amik az n-edik generációba tartozó feladatok elvégzése alatt érkeznek. Jelölje Z_n az n-edik generáció elemszámát, $n = 0, 1, 2, \dots$. Válaszoljuk meg az alábbi kérdéseket

I. ha $p = 4/10$,
II. ha $p = 2/10$.

a.) Mennyi Z_1 várható értéke?
b.) Mi Z_1 generátorfüggvénye?
c.) Mi Z_2 generátorfüggvénye?
d.) Mennyi Z_{72} várható értéke?
e.) Mennyi az $r_3 := \mathbb{P}(Z_3 = 0)$ valószínűség?
f.) Mennyi annak a valószínűsége, hogy a sor előbb-utóbb újra üres lesz? *(Segítség: egy harmadfokú egyenletet könnyű megoldani, ha ismerjük az egyik gyökét.)*
g.) Mennyi a foglaltsági periódus hosszának várható értéke? (A foglaltsági periódus az a véletlen időszak, aminek a végén először lesz a sor újra üres.)

5.HF: (Beadási határidő: 2015.05.15.)

HF 5.1 Egy diszkrét idejű, időben homogén X_n Markov lánc állapottere $S = \{1, 2, 3\}$. A Markov lánc az 1-es állapotból $50-50\%$ valószínűséggel ugrik a 2-es és 3-as állapotba. Ha a 2-es állapotban van, akkor 50% valószínűséggel ott is marad, 50% valószínűséggel pedig a 3-as állapotba ugrik. A 3-as állapotból mindig az 1-esbe ugrik. A Markov lánc X_0 kezdeti állapotát kockadobással sorsoljuk, egyenlő esélyt adva mindhárom állapotnak.

a.) Rajzoljuk fel a Markov lánc gráf-reprezentációját.

b.) Írjuk fel a Markov lánc átmenetmátrixát.

c.) Írjuk fel a Markov lánc kezdeti eloszlás vektorát.

d.) Mennyi a valószínűsége, hogy a folyamat kezdetén a 131223 állapot-sorozatot figyeljük meg (a 0-dik (kezdő) állapotot is beleértve)?

e.) Mennyi a $\mathbb{P}(X_4 = 1 \mid X_0 = 1)$ átmenetvalószínűség?

f.) Keressük meg a Markov lánc stacionárius eloszlásait.

g.) Közelítőleg mennyi a valószínűsége, hogy 100 lépés után a Markov lánc a 2-es állapotban lesz?

h.) Legyen az $f : S \to \mathbb{R}$ függvény olyan, hogy $f(1) = 0$, $f(2) = 1$ és $f(3) = 5$. Mennyi lesz az $f(X_n)$ sorozat (idő)átlaga hosszú távon?

HF 5.2 Egy fagyis bácsi előtt gyerekek állank sorba. Ő minden sorra kerülő gyereket exponenciális eloszlású véletlen idő alatt szolgál ki, fél perc várható értékkel, az előzményektől és a sorban állók számától függetlenül. A gyerekek Poisson folyamat szerint érkeznek, percenként átlagosan 1, a múlttól és a sor hosszától függetlenül. Kivétel, ha a sorban már 3 gyerek áll, mert akkor több nem állhat be (az apukája elvonszolja). Jelölje $X(t)$ a sorban állók számát t idő elteltével. Az időt mérjük percben. Modellezzük a sor hosszát folytonos idejű Markov lánccal.

a.) Mi a Markov lánc állapottere?

b.) Rajzoljuk fel a Markov lánc gráf-reprezentációját – vagyis a lehetséges átmenetek irányított gráfját az egyes átmenetek rátáival.

c.) Írjuk fel a Markov lánc ráta-mátrixát.

d.) Írjuk fel a Markov lánc tartózkodási idő paraméter vektorát.

e.) Ha a sor hossza éppen 2, várhatóan mennyi idő múlva fog megváltozni?

f.) Ha a sor hossza éppen 2, mennyi a valószínűsége, hogy a következő állapot a 3 lesz?

g.) Írjuk fel a Markov lánc infinitezimális generátorát.

h.) Keressük meg a Markov lánc stacionárius eloszlásait.

i.) Ha a sor $t = 0$-kor üres, közelítőleg mennyi a valószínűsége, hogy 2 óra elteltével 3 lesz a hossza?

j.) Az idő hány százalékát tölti a fagyis bácsi tétlenül (mert üres a sor) hosszú távon?