Felsőbb Matematika Informatikusoknak – Sztochasztika
házi feladatok a 2. részhez
2015 ősz

Minden héten összesen egy pontot érnek a kitűzött feladatok.

1.HF: (Beadási határidő: 2015.11.09.)

HF 1.1 Egy számítógépes hálózati kiszolgálóhoz Poisson folyamat szerint érkeznek az igények, percenként átlagosan tíz. Minden igény kiszolgálása során $\frac{1}{10}$ valószínűséggel történik valamilyen hiba, az előzményektől függetlenül.

a.) Mennyi annak a valószínűsége, hogy egy perc alatt (mondjuk 08:00-tól 08:01-ig) 5-nél kevesebb igény érkezik?

b.) Mennyi annak a valószínűsége, hogy 08:00-tól 09:00-ig pontosan 2 hiba történik?

c.) Mennyi annak a valószínűsége, hogy 08:00-tól 08:01-ig legalább 5 igény érkezik, de egy hiba sem történik? (*Vigyázat: Az igények száma és a hibák száma nem független! Tipp: a hibát nem okozó igények száma viszont független a hibák számától. Miért is?*

Megoldás:

a.) Legyen $X_{[a;b]}$ az a és b időpont között érkező igények száma, és mérjük az időt 08:00-tól kezdve percben. Mivel percenként átlagosan tíz igény érkezik, a Poisson folyamat rátája $\lambda_X = 10$, így $a = 0$, $b = 1$ választással $X_{[0;1]} \sim Poi((b-a)\lambda_X) = Poi(10)$. (Persze: az egy perc alatt érkező igények száma Poisson eloszlású, várható értéke pedig 10.) Így annak a valószínűsége, hogy egy perc alatt 5-nél kevesebb igény érkezik,

$$\mathbb{P}(X_{[0;1]} < 5) = \sum_{k=0}^{4} \mathbb{P}(X_{[0;1]} = k) = \sum_{k=0}^{4} e^{-10}\frac{10^k}{k!} =$$
$$= e^{-10}\left(1 + 10 + \frac{10^2}{2} + \frac{10^3}{6} + \frac{10^4}{24}\right) \approx 0.02925$$

b.) Legyen $Y_{[a;b]}$ az a és b időpont között történő hibák száma. Mivel az egyes igények az előzményektől függetlenül azonos valószínűséggel okoznak hibát, a hibák is Poisson folyamatot alkotnak (ami az igények Poisson folyamatának ritkítása), ennek rátája $\lambda_Y = \frac{1}{10} \cdot 10 = 1$. (Persze: percenként átlag 1 hiba történik.) Így $Y_{[0;60]} \sim Poi((60-0)\lambda_Y) = Poi(60)$, amiből

$$\mathbb{P}(Y_{[0;60]} = 2) = e^{-60}\frac{60^2}{2!} \approx 1.576 \cdot 10^{-23}$$

c.) Legyen $Z_{[a;b]}$ az a és b időpont között érkező, *hibát nem okozó* igények száma. Így az Y és a Z Poisson folyamatok egyaránt az X ritkításai, amik ráadásul diszjunktak: ha egy igény az egyik folyamatban szerepel, akkor a másikban nem. Az ilyenekről tudjuk előadásról, hogy *egymástól* függetlenek (de persze az X folyamattól nem). Így

$$Y_{[0;1]} \sim Poi((1-0)\frac{1}{10} \cdot 10) = Poi(1) \quad , \quad Z_{[0;1]} \sim Poi((1-0)\frac{9}{10} \cdot 10) = Poi(9)$$

a kérdés pedig $\mathbb{P}(X_{[0;1]} \geq 5 \text{ és } Y_{[0;1]} = 0)$. Ennek a számolásakor az Y és Z függetlenségét úgy tudjuk kihasználni, hogy

$$\mathbb{P}(X_{[0;1]} \geq 5, Y_{[0;1]} = 0) = \mathbb{P}(Z_{[0;1]} \geq 5, Y_{[0;1]} = 0) = \mathbb{P}(Z_{[0;1]} \geq 5) \cdot \mathbb{P}(Y_{[0;1]} = 0).$$

Az első tényező

$$\mathbb{P}(Z_{[0;1]} \geq 5) = 1 - \sum_{k=0}^{4} e^{-9}\frac{9^k}{k!} = 1 - e^{-9}\left(1 + 9 + \frac{9^2}{2} + \frac{9^3}{6} + \frac{9^4}{24}\right),$$

a második pedig

$$\mathbb{P}(Y_{[0;1]} = 0) = e^{-1}\frac{1^0}{0!} = e^{-1}.$$

Ezt összerakva

$$\mathbb{P}(X_{[0;1]} \geq 5, Y_{[0;1]} = 0) = \left[1 - e^{-9}\left(1 + 9 + \frac{9^2}{2} + \frac{9^3}{6} + \frac{9^4}{24}\right)\right] e^{-1} \approx 0.3477$$

2.HF: (Beadási határidő: 2015.11.30.)

HF 2.1 **Második verzió egy sajtóhiba javítása után - bocs.** Legyenek $X_1, X_2, \ldots$ független, de *nem azonos eloszlású* valószínűségi változók. Konkrétan minden k-ra legyenek X_k lehetséges értékei -1 és k^2-1 a következő valószínűségekkel:

$$\mathbb{P}(X_k = k^2 - 1) = \frac{1}{k^2} \quad , \quad \mathbb{P}(X_k = -1) = 1 - \frac{1}{k^2}.$$

Legyen $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$.

a.) Mennyi X_k és S_n várható értéke?

b.) Mutassuk meg, hogy 1 valószínűséggel $\frac{S_n}{n} \to -1$. *(Tipp: használjuk valamelyik Borel-Cantelli lemmát.)*

Megoldás:

a.) $\mathbf{E}X_k = \left(1 - \frac{1}{k^2}\right)(-1) + \frac{1}{k^2}(k^2-1) = 0$, így $\mathbf{E}S_n = \sum_{k=1}^{n}\mathbf{E}X_k = 0$.

b.) Legyen minden k-ra A_k az az esemény, hogy az X_k nem -1, hanem k^2-1, vagyis $A_k = \{X_k \neq -1\}$. Erre $\mathbb{P}(A_k) = \frac{1}{k^2}$, amiből $\sum_{k=1}^{\infty}\mathbb{P}(A_k) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2} < \infty$, ezért az első Borel-Cantelli lemma értelmében az A_k-k közül 1 valószínűséggel csak véges sok következik be. Vagyis az $X_1, X_2, X_3, \ldots$ sorozat 1 valószínűséggel olyan, hogy csak véges sok eleme különbözik -1-től, így egy (véletlen) ponttól kezdve minden eleme -1. Így persze az $\frac{S_n}{n}$ átlag -1-hez tart.

HF 2.2 a.) Legyenek $X_1, X_2, \ldots$ független valószínűségi változók 1 paraméterű exponenciális eloszlással. Legyen $M_n = \max\{X_1, \ldots, X_n\}$. Számoljuk ki M_n eloszlásfüggvényét. *(Tipp: valahány szám maximuma akkor kisebb x-nél, ha mindegyik szám kisebb x-nél :))*

b.) Legyen $Y_n := M_n - \ln n$. Számoljuk ki Y_n eloszlásfüggvényét.

c.) A gyenge konvergencia eloszlásfüggvényes definíciójával mutassuk meg, hogy az Y_n sorozat gyengén konvergens, és adjuk meg a határeloszlás eloszlásfüggvényét. *(Tipp: $e^{-\ln n} = \frac{1}{n}$ és $\lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{c}{n}\right)^n = e^{-c}$.)*

d.) Móricka vesz a boltban egy $n = 5184705528587072464087$ atommagból álló mintát. A magok mindegyike $T_{1/2} = 0.693$ óra felezési idővel bomlik. Számoljuk ki annak a közelítő valószínűségét, hogy 51 óra elteltével Mórickának még mindig megvan elbomlatlanul legalább egy atommagja. *(Tipp: $n \approx e^{50}$ és $T \approx \ln(2)$.)*

Megoldás:

a.) Legyen az X_i-k közös eloszlásfüggvénye F_X. Mivel $X_i \sim Exp(1)$, $x \geq 0$-ra $F_X(x) = \mathbb{P}(X_i < x) = 1 - e^{-x}$. (És $x < 0$-ra pedig $F_X(x) = 0$.) Most legyen F_{M_n}

az M_n eloszlásfüggvénye. Az X_i-k függetlensége miatt

$$\begin{aligned} F_{M_n}(x) &= \mathbb{P}(M_n < x) = \mathbb{P}(X_1 < x, \ldots, X_n < x) = \\ &= \mathbb{P}(X_1 < x) \cdots \mathbb{P}(X_n < x) = (F_X(x))^n = \\ &= \begin{cases} (1 - e^{-x})^n, & \text{ha } x \geq 0 \\ 0, & \text{ha } x < 0. \end{cases} \end{aligned}$$

b.) Legyen Y_n eloszlásfüggvénye F_{Y_n}. Ekkor az Y_n definíciója alapján

$$\begin{aligned} F_{Y_n}(y) &= \mathbb{P}(Y_n < y) = \mathbb{P}(M_n - \ln n < y) = \mathbb{P}(M_n < y + \ln n) = \\ &= F_{M_n}(y + \ln n) = \begin{cases} \left(1 - e^{-(y+\ln n)}\right)^n, & \text{ha } y + \ln n \geq 0 \\ 0, & \text{ha } y + \ln n < 0 \end{cases} = \\ &= \begin{cases} \left(1 - \frac{e^{-y}}{n}\right)^n, & \text{ha } y \geq -\ln n \\ 0, & \text{ha } y < -\ln n. \end{cases} \end{aligned}$$

c.) Minden *rögzített* y-ra ki kell számolni az $F(y) := \lim_{n\to\infty} F_{Y_n}(y)$ határértéket. Mivel minden rögzített y-ra előbb-utóbb $y > -\ln n$, a határérték számolásánál az F_{Y_n} képletének csak az első sora érdekes, és a segítségnek megfelelően

$$F(y) = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{e^{-y}}{n}\right)^n = e^{-e^{-y}}.$$

Ezzel a feladat *nincs még kész*: ellenőriznünk kell, hogy az $F(y)$ határérték tényleg eloszlásfüggvény. Valóban:

i) F folytonos,

ii) F monoton növekvő, mert $F'(y) = e^{-e^{-y}}(-e^{-y})(-1) > 0$

iii) $\lim_{y\to-\infty} F(y) = e^{-e^{-(-\infty)}} = e^{-e^{\infty}} = e^{-\infty} = 0$

iv) $\lim_{y\to+\infty} F(y) = e^{-e^{-(+\infty)}} = e^{-e^{-\infty}} = e^{-0} = 1$

Ezért definíció szerint Y_n gyengén konvergál egy Y valószínűségi változóhoz, aminek eloszlásfüggvénye az $F(y) = e^{-e^{-y}}$.

d.) Legyen X_i az i-edik atommag elbomlásának ideje órában mérve. Fizikából tudjuk, hogy az X_i-k függetlenek és exponenciális eloszlásúak. Ha a paraméter λ, akkor a felezési idő $T_{\frac{1}{2}} = \frac{\ln 2}{\lambda}$, mert erre igaz, hogy $\mathbb{P}(X_i > T_{\frac{1}{2}}) = \frac{1}{2}$. Vagyis esetünkben $\lambda = 1$, és az X_i-kre változtatás nélkül érvényesek az előző feladatrászek. A kérdés pedig

$$\mathbb{P}(M_n \geq 51) = \mathbb{P}(Y_n \geq 51 - \ln n) = \mathbb{P}(Y_n \geq 1) =?$$

Az előző pontban kapott határeloszlás-tétel szerint pedig

$$\mathbb{P}(Y_n \geq 1) \approx \mathbb{P}(Y \geq 1) = 1 - F(1) = 1 - e^{-e^{-1}} \approx 0.308.$$