2. ZH megoldások

2015. december 1. 18:00

Felsőbb Matematika Informatikusoknak – Sztochasztika

1. Egy 1000 oldalas könyvben 500 sajtóhuba van, véletlenszerűen elszórva.

   a.) Körülbelül mennyi a valószínűsége, hogy a 13-adik oldalon legalább 2 sajtóhuba van?

   b.) Körülbelül mennyi a valószínűsége, hogy a 13-adik oldalon legalább 2, a 666-odikon pedig legfeljebb 2 sajtóhuba van?

   Megoldás:

   a.) Legyen X_{13} a 13-adik oldalon található sajtóhubák száma. Ez binomiális eloszlású $n = 500$ és $p = \frac{1}{1000}$ paraméterekkel, mert $n = 500$ huba próbál a 13-adik oldalra kerülni, mindegyiknek a többitől függetlenül $p = \frac{1}{1000}$ valószínűséggel sikerül, és X_{13} a sikeres próbálkozók száma. Mivel n nagy és p kicsi, az jól közelíthető $\lambda = np = \frac{1}{2}$ paraméterű Poisson eloszlással, vagyis minden (épeszű) k-ra

   $$\mathbb{P}(X_{13} = k) \approx e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\frac{1}{2}}\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^k}{k!}.$$

   Így

   $$\mathbb{P}(X_{13} \geq 2) = 1 - (\mathbb{P}(X_{13} = 0) + \mathbb{P}(X_{13} = 1)) \approx 1 - e^{-\frac{1}{2}}\left(1 + \frac{1}{2}\right) \approx 0.0902$$

   b.) Legyen X_{666} a 666-odik oldalon található sajtóhubák száma. Ahogy X_{13}, úgy X_{666} is $\lambda = \frac{1}{2}$ paraméterű Poisson eloszlással közelíthető, ezért

   $$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_{666} \leq 2) &= \mathbb{P}(X_{666} = 0) + \mathbb{P}(X_{666} = 1) + \mathbb{P}(X_{666} = 2) \\ &\approx e^{-\frac{1}{2}}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{2}\right) \approx 0.9856\end{aligned}$$

   Ráadásul X_{13} és X_{666} közel függetlenek (mert ha az egyiket ismerjük, és valami épeszű szám, az alig befolyásolja a másik oldalra kerüléssel próbálkozó hubák számát). Ezért

   $$\mathbb{P}(X_{13} \geq 2 \text{ és } X_{666} \leq 2) \approx \mathbb{P}(X_{13} \geq 2)\mathbb{P}(X_{666} \leq 2) \approx 0.0902 \cdot 0.9856 \approx 0.0889$$

2. Egy tanuló algoritmus egy végtelen hosszú adatsor megfigyelése során minden lépésben tippel a következő adatra, mégpedig egyre ügyesebben: az n-edik tipp az előzményektől függetlenül p_n valószínűséggel hibás, és p_n csökken. Mennyi a valószínűsége annak, hogy az algoritmus végtelen sokszor téved,

   a.) ha $p_n = \frac{1}{n+100}$,

   b.) ha $p_n = \frac{1}{(n+1)^2}$?

   Megoldás: Legyen A_n az az esemény, hogy az n-edik tipp hibás, így $p_n = \mathbb{P}(A_n)$. Kérdés a

   $$\mathbb{P}(\limsup_n A_n) = \mathbb{P}(\text{végtelen sok } A_n \text{ teljesül})$$

   valószínűség.

   a.) ha $p_n = \frac{1}{n+100}$, akkor $\sum_n p_n = \infty$. Mivel az A_n-ek függetlenek is, a második Borel-Cantelli lemma miatt $\mathbb{P}(\limsup_n A_n) = 1$.

b.) ha $p_n = \frac{1}{(n+1)^2}$, akkor $\sum_n p_n < \infty$, így az első Borel-Cantelli lemma miatt $\mathbb{P}(\limsup_n A_n) = 0$. (Ebben az esetben nem is kell a függetlenség.)

3. Egy hálózati kiszolgáló minden beérkező igényt pontosan 1 időegység alatt szolgál ki. Az igények pedig $\frac{2}{3}$ rátájú Poisson folyamat szerint érkeznek és állnak be a kiszolgálási sorba, vagyis az egy igény kiszolgálásával töltött 1 időegység alatt érkező újabb igények száma $\frac{2}{3}$ paraméterű Poisson eloszlású, és független az előzményektől. A $t = 0$ pillanatban az addig üres sorba megérkezik az első igény, és ezzel kezdetét veszi egy „foglaltsági periódus”, ami addig tart, amíg egy igény kiszolgálása után újra üres nem lesz a sor. Számoljuk ki a foglaltsági periódus hosszának várható értékét!

   Megoldás: Definiáljuk az igények családfáját a következőképpen: egy igény *gyerekeinek* tekintjük azokat az igényeket, amik az ő kiszolgálása alatt érkeznek. Mivel minden igény kiszolgálása pontosan 1 időegységig tart, a gyerekek száma a bejövő Poisson folyamat beütésszáma ezen 1 időegység alatt, vagyis az előzményektől független, $\lambda = \frac{2}{3}$ paraméterű Poisson eloszlású valószínűségi változó.

   Tekintsük az igények 0. generációjának a $t = 0$-kor érkező legelső igényt egymagát. Tekintsük 1. generációnak az ő gyerekeit, illetve általában $(n + 1)$-edik generációnak az n-edik generáció tagjainak gyerekeit.

   Jelöljük Z_n-nel az n-edik generáció elemszámát. Így Z_n Galton-Watson elágazó folyamat $X \sim Poi\left(\frac{2}{3}\right)$ egylépéses utódszámeloszlással. A foglaltsági periódus hossza nem egyéb, mint a folyamat kihalásáig az összes generáció össz-létszáma, vagyis $N = \sum_{n=0}^{\infty} Z_n$. A kérdés pedig $\mathbb{E}N$.

   Az egylépéses utódszám várható értéke $m = \mathbb{E}X = \lambda = \frac{2}{3}$. Mivel $m < 1$, a folyamat szubkritikus, és ilyenkor tudjuk, hogy

$$\mathbb{E}N = \frac{1}{1-m} = \frac{1}{1-\frac{2}{3}} = 3.$$