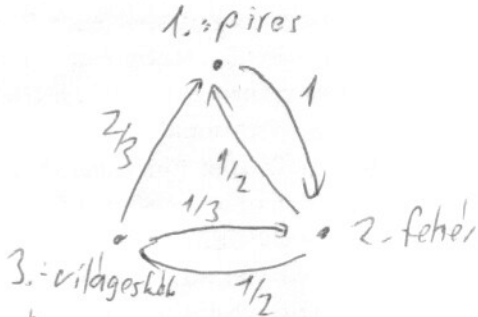
3) Legyen az állapottér $S=\{1,\ 2,\ 3\}=\{$piros, fehér, világoskék$\}$

a.) Ezzel $P=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}$, mert „1 után mindig 2"

„2 után érmedobás"

„3 után kockadobás" $\mathbb{P}(X_{n+1}=2 \mid X_n=3)=\frac{1}{3}$

avagy: gráf-reprezentáció



b.) Legyen az $n=0$ időpont május 14-e.

Legyen X_n a blúz színe az n-edik napon.

$$\mathbb{P}(X_4=1 \mid X_0=1)=\mathbb{P}(1\to 2\to 1\to 2\to 1 \mid X_0=1)+\mathbb{P}(1\to 2\to 3\to 2\to 1 \mid X_0=1)=$$

$$=P_{12}P_{21}P_{12}P_{21}+P_{12}P_{23}P_{32}P_{21}=1\cdot\frac{1}{2}\cdot 1\cdot\frac{1}{2}+1\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}+\frac{1}{12}=\boxed{\frac{1}{3}}$$

(Csak ezen a 2 útvonalon lehet 1-ből 1-be jutni 4 lépésben.)

Avagy: $P^2=P\cdot P=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & * & * \\ \frac{1}{6} & * & * \end{pmatrix}$

$\Rightarrow P^4=P^2\cdot P^2=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & * & * \\ \frac{1}{6} & * & * \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & * & * \\ \frac{1}{6} & * & * \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix}$

A $*$-gal jelölt mátrix-elemeket nem kell kiszámolni

$$\Rightarrow \mathbb{P}(X_4=1 \mid X_0=1)=(P^4)_{11}=\boxed{\frac{1}{3}}$$

c.) $\boxed{\mathbb{P}(X_{17}=3 \mid X_0=1)=(P^{17})_{13}}$, ahol P a fenti mátrix.

(Május 31-e az $n=17$-edik nap.)

① a.) $X \sim Uni(\{1,2,\dots,6\}) \Rightarrow p_k = \mathbb{P}(X=k) = \frac{1}{6} \quad (k=1,2,\dots 6) \Rightarrow g_X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k z^k = \frac{1}{6}z + \frac{1}{6}z^2 + \dots + \frac{1}{6}z^6$

$$\Rightarrow g(z) = \frac{z+z^2+\dots+z^6}{6} = \frac{z}{6}\,\frac{1-z^6}{1-z}$$

b.) Legyen X_i a sárgával dobott i-edik szám, ~~ahol~~ $i=1,2,\dots,6$, így $Y = X_1+X_2+\dots+X_6$ és $X_i \sim Uni(\{1,\dots,6\})$. Az X_i-k függetlenek, ezér

$$g_Y(z) = g_{X_1}(z)\cdot\ldots\cdot g_{X_6}(z) = \left(g_X(z)\right)^6 = \left(\frac{z+z^2+\dots+z^6}{6}\right)^6 = \left(\frac{z}{6}\,\frac{1-z^6}{1-z}\right)^6$$

c.) Legyen N a kékkel dobott szám, és X_i a pirossal dobott i-edik szám.

$N \sim Uni(\{1,\dots,6\})$ és $X_i \sim Uni(\{1,\dots,6\})$ és mind függetlenek, $g_N(z) = g_{X_i}(z) = \frac{z}{6}\,\frac{1-z^6}{1-z}$

Ezzel $Y = S_N = \sum_{i=1}^{N} X_i$ véletlen tagszámú összeg

$$\Rightarrow g_Y(z) = g_N(g_X(z)) = \boxed{\frac{1}{6}\left(\frac{z}{6}\,\frac{1-z^6}{1-z}\right)\frac{1-\left(\frac{z}{6}\,\frac{1-z^6}{1-z}\right)^6}{1-\frac{z}{6}\,\frac{1-z^6}{1-z}}}$$

② Legyen a „0. generáció" a legelső folyamat

az „1. generáció" a —— // —— gyerekei

⋮

az „n+1. generáció" az n. generáció gyerekei, $n=0,1,\dots$

Legyen Z_n az n. generáció elemszáma

Ez a Z_n Galton-Watson elágazó folyamat, $Z_0=1$, és az 1-lépéses utódszám-eloszlás $\sim X_1 =$ a legelső folyamat által indított alfolyamatok száma.

a.) $\boxed{X \sim Bin(n=3;\ p=\tfrac{1}{3})}$, mert $n=3$ részfeladat mindegyike $p=\frac{1}{3}$ val. séggel eredményez alfolyamatot a többitől ftl-ül, így X a „sikerek száma".

Vagyis $\mathbb{P}(X=k) = \binom{3}{k}\left(\frac{1}{3}\right)^k\left(\frac{2}{3}\right)^{3-k} \quad k=0,1,2,3.$

b.) Legyen g az X generátorfv-e: $g_X(z) = (q+pz)^n = \left(\frac{2}{3}+\frac{1}{3}z\right)^3$, ahol $p=\frac{1}{3}$, $q=1-p$

Így $r_2 = \mathbb{P}(Z_2=0) = ?$ Ehhez $r_0=0$, $r_1 = g(r_0) = g(0) = \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{8}{27}$, $r_2 = g\left(\frac{8}{9}\right) = \left(\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{8}{27}\right)^3$

$$\Rightarrow \boxed{r_2 = \mathbb{P}(Z_2=0) = \left(\frac{62}{81}\right)^3 \approx 0.448}$$

c.) $m := EX = np = 3\cdot\frac{1}{3} = 1$, a folyamat kritikus (és nem elfajult) $\Rightarrow \boxed{\mathbb{P}(\text{kihalás}) = \mathbb{P}(\text{lefut}) = 1}$

d.) $\mathbb{E}N = ?$, ahol $N = \sum_{n=0}^{\infty} Z_n$. Erről tudjuk, hogy $m=1 \Rightarrow \boxed{\mathbb{E}N = \infty}$