Sztochasztika 2 félvizsga

Felsőbb matematika informatikusoknak – Sztochasztika

2015. május 26. 8:00. Munkaidő: 70 perc. Minden feladat $6\frac{1}{4}$ pontot ér.

1. Egy béka egy hosszú lépcsősoron ugrál felfelé, de egyre fárad: annak valószínűsége, hogy az n-edik ugrással sikerül egy lépcsővel feljebb kerülnie, p_n a korábbi ugrásoktól függetlenül, és sajnos p_n csökken. Mennyi a valószínűsége, hogy kitartóan próbálkozva mégis akármilyen magasra feljut, ha

   a.) $p_n = \frac{1}{n^2}$

   b.) $p_n = \frac{1}{n}$

   Segítség: használjuk a Borel-Cantelli lemmákat.

2. Egy repülőre a 200 utas közül 150-en csak fejenként egy bőröndöt adnak fel, ami legfeljebb 20 kilós lehet, de átlagosan csak 8 kiló szokott lenni. A maradék 50 utas fejenként két bőröndöt ad fel, amik (ketten) összesen legalább 20, legfeljebb 40 kilósak – a sokévi átlag 30 kiló. Adjunk nagy eltérés becslést annak valószínűségére, hogy a feladott bőröndök össztömege meghaladja a 3500 kg-ot.

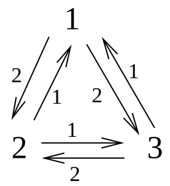
3. Négy gyerek ül egy asztal körül. Egy játékmacit adogatnak egymásnak úgy, hogy egy szabályos dobókockát dobálnak és mindig annyiszor adják tovább a macit (mindig jobbra), amennyit dobtak.

   a.) Modellezzük a maci helyét az egyes dobások után Markov lánccal. Írjuk fel az állapotteret és az átmenetmátrixot.

   b.) Kezdetben a maci Mórickánál van. Mi a valószínűsége, hogy két dobás után újra nála lesz?

   c.) Kezdetben a maci Mórickánál van. Mi a közelítő valószínűsége, hogy 100 dobás után újra nála lesz? Miért?

4. Az alábbi ábra egy folytonos idejű (időben homogén) Markov lánc lehetséges egylépéses átmeneteit mutatja, a hozzájuk tartozó urgási rátákkal együtt.



   a.) Írjuk fel a Markov lánc infinitezimális generátorát és a beágyazott diszkrét idejű Markov lánc átmenetmátrixát!

   b.) Ha a Markov lánc kezdetben a 2 állapotban van, mi a közelítő valószínűsége, hogy 100 időegység eltelte után a 3 állapotban találjuk?

   c.) Hosszú távon az idő hány százalékában lesz a rendszer az 1-es és 2-es állapotok valamelyikében?