Felsőbb Mat. Informatikusoknak – Sztochasztika vizsga megoldások 2015.12.22 Nagy
2015 ősz

1/2

① A nagy számok gyenge törvénye szerint

$$\frac{X_1+\dots+X_n}{n} \Rightarrow m=5,$$ vagyis minden $\varepsilon>0$-ra

$$\cancel{\mathbb{P}\left(\left|\frac{X_1+\dots+X_n}{n}\right|\geq\varepsilon\right)\to 0}. \quad \mathbb{P}\left(\left|\frac{X_1+\dots+X_n}{n}-m\right|\geq\varepsilon\right)\longrightarrow 0$$

Pl. $\varepsilon=1$-re is

$$\mathbb{P}\left(\frac{X_1+\dots+X_n}{n}\leq 4\right)\leq\mathbb{P}\left(\left|\frac{X_1+\dots+X_n}{n}-5\right|\geq 1\right)\longrightarrow 0$$

így $$\boxed{\lim_{n\to\infty}\mathbb{P}\left(\frac{X_1+\dots+X_n}{n}>4\right)=1-0=1}$$

② • $\{1,2,3\}$ nyílt, lényegtelen, átmeneti, periódusa 3.

• $\{4,7,8,9\}$ nyílt, lényegtelen, átmeneti,
periódusa $d=\text{lnko}\{3,4,6,7,\dots\}=1$.

• $\{5,6\}$ zárt, lényeges, visszatérő, periódusa 1.

③ A ráta mindig a várakozási idő reciproka. Legyen $S=\{0,1\}=\{\text{ki},\text{be}\}$
így $\lambda_{01}=1$, $\lambda_{10}=6$, Legyen a Markov lánc $X(t)$.

a.) $G=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 6 & -6\end{pmatrix}$

b.) $t=\frac{1}{60}$ rövid idő, így $\mathbb{P}(X(t)=0\mid X(0)=0)=P_{00}(t)\approx(\mathbb{1}+tG)_{00}=1+t(-1)$
$=1-t=\frac{59}{60}\approx 0.983$

c.) $t=20$ hosszú idő, ~~így~~ a Markov lánc véges állapotterű és
irreducibilis, így a Markov láncok alaptétele szerint
$\mathbb{P}(X(t)=0\mid X(0)=0)\approx\Pi_0$, ahol Π az egyetlen stac. eloszlás

3 c.) – folytatás –

Kiszámoljuk Π-t: $G^T \Pi^T = 0$, vagyis $\begin{pmatrix} -1 & 6 \\ 1 & -6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \Pi_0 \\ \Pi_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$,

vagyis $\left(\begin{array}{cc|c} -1 & 6 & 0 \\ \cancel{1} & \cancel{-6} & \cancel{0} \end{array}\right) \Rightarrow \Pi_0 = 6\Pi_1 \Rightarrow \Pi = \text{const}\cdot(6 \quad 1)$

$$\boxed{\Pi = \left(\tfrac{6}{7} \quad \tfrac{1}{7}\right)}$$

ebből $\boxed{\mathbb{P}(X(20)=0 \mid X(0)=0) \approx \Pi_0 = \frac{6}{7} \approx 0.857}$

d.) A teljesítmény $f: S \to \mathbb{R}$, $f(0)=10$, $f(1)=300$,

vagyis $f = \begin{pmatrix} 10 \\ 300 \end{pmatrix}$. Mivel a Markov lánc véges állapotterű

és irreducibilis, az ergodtétel szerint 1 val.séggel

$$f \text{ időátlaga} = \mathbb{E}_\Pi f = \sum_{i\in S} \Pi_i f(i) = \Pi f = \left(\tfrac{6}{7} \quad \tfrac{1}{7}\right)\begin{pmatrix} 10 \\ 300 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{360}{7} \approx \underline{\underline{51.4}} \quad (\text{Watt})$$

4 Legyen $n = 100000$ és $i = 1,2,\ldots,n$-re $X_i = \begin{cases} 1, & \text{ha az } i\text{-odik user belép} \\ 0, & \text{ha nem.} \end{cases}$

Így $S_n = X_1 + \ldots + X_n$ a belépők száma, X_i-k függetlenek.

a kérdés pedig $\mathbb{P}(S_n \geq 41000) \leq ?$

Ehhez $\mathbb{E}S_n = 25000\cdot 0.9 + 25000\cdot 0.5 + 25000 \cdot 0.2 = 40000$,

és X_i-k korlátosak: $0 = a_i \leq X_i \leq b_i = 1$, amiből $\sum_{i=1}^{n}(b_i - a_i)^2 = n(1-0)^2 = n$.

Így $\boxed{t = 1000}$ választással a Hoeffding-egyenlőtlenség szerint

$$\mathbb{P}(S_n \geq 41000) = \mathbb{P}(S_n \geq \mathbb{E}S_n + t) \leq \exp\left(-\frac{2t^2}{\sum_{i=1}^{n}(b_i-a_i)^2}\right) = \exp\left(-\frac{2\cdot 1000^2}{100000}\right) = e^{-20} \approx 2.06\cdot 10^{-9}$$