Sztochasztika 2 félvizsga

Felsőbb matematika informatikusoknak – Sztochasztika

2016. január 5. 8:00. Munkaidő: 90 perc. Minden feladat $6\frac{1}{4}$ pont.

1. Egy szabályos dobókockát addig dobálunk, amíg ki nem jön rajta a hatos. Legyen N az első hatost megelőző *nem hatos* dobások száma, S pedig ezen *nem hatos* dobások összege.

   a.) Mi N eloszlása?

   b.) Mi N generátorfüggvénye?

   c.) Mennyi S várható értéke?

   d.) Mi S generátorfüggvénye?

   (Tipp és figyelmeztetés: $S = X_1 + X_2 + \cdots + X_N$, ahol X_i egy olyan kockadobás eredménye, ami nem *hatos.)*

2. A diszkrét idejű, időben homogén X_n Markov lánc állapottere $S = \{1, 2, 3, 4\}$, átmenetmátrixa

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1/3 & 0 & 2/3 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 & 2/3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

   a.) Rajzoljuk le a Markov lánc gráf-reprezentációját!

   b.) Közelítőleg mennyi a $\mathbb{P}(X_{100} = 4 \mid X_0 = 1)$ valószínűség?

3. Egy kisboltban legfeljebb 5 vásárló fér el. A vásárlók Poisson folyamat szerint érkeznek, kétpercenként átlagosan három – hacsak nem tele van a bolt, mert akkor nem jön új vevő – és beállnak az egyetlen sorba. A boltban két pénztár működik. Aki sorra kerül, azt véletlen idő alatt szolgálják ki, aminek eloszlása exponenciális, várható értéke 1 perc, és független az előzményektől. Legyen $X(t)$ a t időpontban a boltban lévő vásárlók száma. (Az időt mérjük percben.) Adjuk meg az $X(t)$ Markov lánc

   a.) állapotterét,

   b.) gráf-reprezentációját,

   c.) infinitezimális generátorát.

4. Egy véletlen algoritmus egy eldöntendő kérdésre 90% valószínűséggel ad helyes választ. Ezért az algoritmust lefuttatjuk 100-szor egymástól függetlenül, és azt a választ fogadjuk el, ami többször jön ki. Adjunk nagy eltérés becslést annak valószínűségére, hogy rosszul döntünk (vagy nem tudunk dönteni, mert az eredmény döntetlen).