Sztochasztika 2 félvizsga

Felsőbb matematika informatikusoknak – Sztochasztika

2015. június 2. 8:00. Munkaidő: 70 perc. Minden feladat $6\frac{1}{4}$ pontot ér.

1. Legyen Z_k Galton-Watson elágazó folyamat, ahol az egylépéses utódszám-eloszlás generátorfüggvénye $g(z) = e^{z-1}$. Mennyi a valószínűsége, hogy a folyamat előbb-utóbb kihal?

2. Juliska a körmét minden nap más színűre festi. Vörös, narancs és barna között váltogat. Narancs után mindig barna következik, barna után viszont érmedobással dönt arról, hogy vörös vagy narancs következzen-e. Vörös után kockát dob: ha az eredmény 6-os, akkor barna következik, egyébként narancs.

   a.) Írjuk fel Juliska körme színének, mint Markov láncnak az átmenetmátrixát!

   b.) Ha Juliska körme május 1-én vörös, mennyi a valószínűsége, hogy május 5-én is vörös?

   c.) A napok hanyad részében lesz vörös, narancs illetve barna Juliska körme hosszú távon?

3. Egy egyszerű jelfeldolgozó eszköz az egyes beérkező jeleket független, exponenciális eloszlású véletlen idők alatt dolgozza fel. A feldolgozási idő várható értéke 1 másodperc (vagyis $\frac{1}{60}$ perc). Amíg egy bejövő jel feldolgozása zajlik, addig az esetlegesen beérkező újabb jeleket az eszköz figyelmen kívül hagyja (vagyis nincs feldolgozási sor). A beérkező jelek Poisson folyamat szerint érkeznek, percenként átlagosan 2. Az eszköz így kétféle állapotban lehet: „szabad, passzív, jelre vár”, illetve „foglalt, feldolgozás folyamatban, nem figyel”.

   Modellezzük az eszköz állapotát folytonos idejű Markov lánccal. Az időt mérjük percben.

   a.) Írjuk fel a Markov lánc infinitezimális generátorát. Indokoljuk.

   b.) Az eszköz a működése első pillanatában szabad. Közelítőleg mennyi a valószínűsége, hogy tíz óra elteltével éppen foglalt lesz? Miért?

   c.) Az eszköz teljesítményfelvétele passzív állapotban $1W$, feldogozás során viszont $10W$. Mennyi az átlagos teljesítményfelvétel hosszú távon? Miért?

4. Egy kis telefonközpontba érkező, egymást követő hívások között eltelt idő mindig exponenciális eloszlású 1 perc várható értékkel, és független az előzményektől. Adjunk nagy eltérés becslést annak valószínűségére, hogy reggel 8 órától számítva a 400-adik hívásra kevesebb, mint 5 órát kell várni.

   (Segítség: a λ paraméterű exponenciális eloszlás Cramér féle rátafüggvénye

   $$I(x) = \lambda x - \ln(\lambda x) - 1 \quad (\textit{ha } x > 0).$$

   A λ paraméterű Poisson eloszlás Cramér féle rátafüggvénye

   $$I(x) = x \ln(x/\lambda) - x + \lambda \quad (\textit{ha } x > 0).)$$