Felsőbb Matematika Informatikusoknak – Sztochasztika vizsga megoldások Mogy

2015 őszi félév, 2016.01.05

1 a.) N az első sikert megelőző kudarcok száma, tehát N pesszimista geometriai eloszlású: $N \sim PessGeom(p)$, ahol $p = \frac{1}{6}$. Vagyis

$$\mathbb{P}(N=k) = q^k p \quad , k = 0,1,2,\ldots \quad , q = 1-p = \frac{5}{6}$$

$$= \left(\frac{5}{6}\right)^k \cdot \frac{1}{6}$$

b.) $$g_N(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(N=k) z^k = \sum_{k=0}^{\infty} q^k p z^k = p \sum_{k=0}^{\infty} (qz)^k = \frac{p}{1-qz} = \frac{1/6}{1-\frac{5}{6}z} = \frac{1}{6-5z}$$

c.) $S = \sum_{k=1}^{N} X_k$ ~~független~~ véletlen tagszámú összeg, ahol X_k egy nem hatos kockadobás eredménye, vagyis egyenletes $\{1,2,3,4,5\}$-ön.

Ezért $$\mathbb{E}S = \mathbb{E}N \, \mathbb{E}X_k = \left(\frac{1}{p}-1\right) \frac{1+2+3+4+5}{5} = 5 \cdot 3 = 15$$

d.) X_k generátorfüggvénye $g_X(z) = \frac{1}{5}z + \frac{1}{5}z^2 + \frac{1}{5}z^3 + \frac{1}{5}z^4 + \frac{1}{5}z^5 = \frac{z+z^2+\ldots+z^5}{5}$,

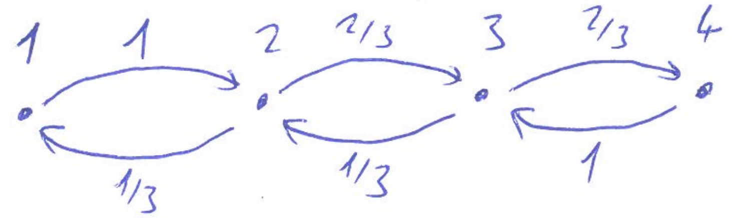
így a véletlen tagszámú összeg generátorfüggvénye

$$g_S(z) = g_N(g_X(z)) = \frac{1}{6 - 5 \cdot \frac{z+z^2+z^3+z^4+z^5}{5}} = \frac{1}{6-(z+z^2+z^3+z^4+z^5)}$$

Felsőbb Matematika Informatikusoknak – Sztochasztika vizsga megoldások Megy

2015 őszi félév, 2016. 01.05

(2) a.)



b.) A Markov lánc periodikus $d=2$ periódussal, 1-ből 4-be páros számú lépésben pont nem lehet eljutni, így

$$\mathbb{P}(X_{100}=4 \mid X_0=1)=0$$

Felsőbb Matematika Informatikusoknak – Sztochasztika vizsga megoldások Mogy
2015 őszi félév, 2016.01.05

(3) a.) $S = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ – ennyi vásárló lehet.

b.) A Markov lánc folytonos idejű, egyszerre 1 valószínűséggel csak egy vevő érkezik vagy távozik – vagyis ugrani csak szomszédos állapotokba lehet.

A felfelé ugrás rátája a Poisson folyamat rátája, amivel a vásárlók érkeznek, vagyis $\frac{3}{2}$.

Ha csak egy vásárló van bent, akkor az ő távozásának (kiszolgálásának) rátája 1 (az exponenciális várakozási idő várható értékének reciproka).

Ha egynél több vásárló van bent, akkor mindkét pénztáros dolgozik, így a két kiszolgálás alatt álló vásárló valamelyikének távozási rátája $1+1=2$.

Mindezen ráták a gráf-reprezentációban:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r, bend left, "3/2"] & 1 \arrow[l, bend left, "1"] \arrow[r, bend left, "3/2"] & 2 \arrow[l, bend left, "2"] \arrow[r, bend left, "3/2"] & 3 \arrow[l, bend left, "2"] \arrow[r, bend left, "3/2"] & 4 \arrow[l, bend left, "2"] \arrow[r, bend left, "3/2"] & 5 \arrow[l, bend left, "2"]
\end{tikzcd}$$

c.) $$G = \begin{pmatrix} -3/2 & 3/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -5/2 & 3/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -7/2 & 3/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -7/2 & 3/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -7/2 & 3/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

A generátor főátlóján kívül az ugrási ráták vannak, a főátló pedig olyan, hogy a sorösszegek nullák.

Felsőbb Matematika Informatikusoknak – Sztochasztika vizsga megoldások Mogy

2015 őszi félév, 2016. 01. 05

④ Legyen $n=100$, és $i=1,2,\ldots 100$-ra legyen

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{ha az } i\text{-edik pilóta hibás választ ad} \\ 0, & \text{ha helyeset.} \end{cases}$$

Így $X_i \sim B(\frac{1}{10})$, az X_i-k függetlenek és

$S_n = X_1 + \ldots + X_n$ a hibás válaszok száma.

Akkor van baj, ha $S_n \geq 50 = \frac{n}{2}$, így a kérdés

a $\mathbb{P}(S_n \geq 50)$ valószínűség.

Az X_i-k korlátosak: $a_i := 0 \leq X_i \leq 1 =: b_i$,

ezért alkalmazható a Hoeffding egyenlőtlenség.

Segédszámolások: $\sum_{i=1}^{n} (b_i - a_i)^2 = \sum_{i=1}^{100} (1-0)^2 = 100 \cdot 1^2 = 100$

$$\mathbb{E} S_n = n \mathbb{E} X_i = n \cdot \frac{1}{10} = 10$$

ezért $t = 40$ választással

$$\mathbb{P}(S_n \geq 50) = \mathbb{P}(S_n \geq \mathbb{E} S_n + t) \overset{\text{Hoeffding}}{\leq} \exp\left(-\frac{2t^2}{\sum_{i=1}^{n}(b_i-a_i)^2}\right) =$$

$$= \exp\left(-\frac{2 \cdot 40^2}{100}\right) = e^{-32} \approx 1.27 \cdot 10^{-14}$$

$\boxed{\text{A hiba valószínűsége legfeljebb } e^{-32} \approx 1.27 \cdot 10^{-14}.}$

[Megjegyzés: A Cramér tétellel ennél jobb becslés is adható, de ez ebben a félévben az előadásból kimaradt.]