

Sztochasztika 2 félév vizsga

Felsőbb matematika informatikusoknak – Sztochasztika

2016. január 12. 8:00. Munkaidő: 90 perc.

1. (5 pont) Az X nemnegatív, egész értékű valószínűségi változó generátorfüggvénye $g(z) = \frac{1+z^2+z^4+z^6}{4}$.
 - a.) Mennyi a $\mathbb{P}(X = 0)$ valószínűség?
 - b.) Mennyi a $\mathbb{P}(X = 5)$ valószínűség?
 - c.) Mennyi X várható értéke?

2. (5 pont) Egy véletlen rekurzív algoritmus futása során kezdetben elindul egyetlen folyamat. Ez a folyamat $\frac{1}{4}$ valószínűséggel kilép anélkül, hogy másikat indítana. $\frac{1}{2}$ valószínűséggel viszont kilépés előtt indít egy önmagával megegyező alfolyamatot, $\frac{1}{4}$ valószínűséggel pedig kettőt. Ezek aztán újra véletlen számú (esetleg nulla) alfolyamatot hoznak létre. Az egyes folyamatok által indított alfolyamatok száma független. Minden alfolyamat futási ideje 1 egység. Az algoritmus akkor fut le, ha minden alfolyamat kilép.
 - a.) Mennyi a valószínűsége, hogy az algoritmus előbb-utóbb lefut?
 - b.) Mennyi a futási idő várható értéke?

3. (10 pont) Egy lépcsőházban két villanykörte folyamatosan világít – már amikor nincsenek kiégetve. Élettartamuk véletlen, független, exponenciális eloszlású, várható értéke fél év. A lépcsőházban Poisson-folyamat szerinti időpontokban – évente átlag 6-szor – megjelenik a gondnok, és az esetleges kiégett körtéket újra cseréli. Legyen $X(t)$ a t időpontban működő villanykörték száma. (Az időt mérjük években.) Adjuk meg az $X(t)$ Markov lánc
 - a.) állapotterét,
 - b.) gráf-reprezentációját,
 - c.) infinitezimális generátorát.
 - d.) Kezdetben mindkét körte működik. Körülbelül mennyi a valószínűsége, hogy pont 10 év múlva egyik sem?
 - e.) Hosszú távon az idő hány százalékában van sötét a lépcsőházban? Miért? (Ablak nincs.)

4. (5 pont) Egy kis vezeték nélküli internet-szolgáltató háromféle díjcsomagot kínál. Az első csomag legfeljebb 2 Mbit/sec (letöltési) sebességet biztosít. Erre 100-an fizetnek elő, és csúcsidőben átlagosan 1 Mbit/sec adatot töltenek le. A második csomag legfeljebb 3 Mbit/sec sebességet biztosít, erre 300-an fizetnek elő, és csúcsidőben átlagosan 2 Mbit/sec adatot töltenek le. A harmadik csomag legfeljebb 6 Mbit/sec sebességet biztosít, erre 150-en fizetnek elő, és csúcsidőben átlagosan 3 Mbit/sec adatot töltenek le. Az egyes felhasználók igénye véletlen és független. A szolgáltató eszközei összesen legfeljebb 1300 Mbit/sec sáv szélességet tudnak biztosítani az előfizetőknek. Adjunk nagy eltérés becslést annak valószínűségére, hogy ez (a csúcsidő egy adott pillanatában) kevésnek bizonyul.