

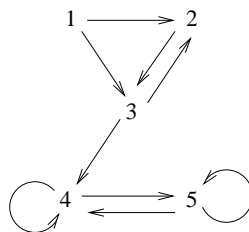
Sztochasztika 2 félévizsga

Felsőbb matematika informatikusoknak – Sztochasztika

2015. június 9. 8:00. Munkaidő: 70 perc. Minden feladat $6\frac{1}{4}$ pontot ér.

1. Legyen X_1, X_2, \dots független, standard normális eloszlású valószínűségi változók sorozata. Legyen $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$, és legyen Ψ_n az $\frac{S_n}{n}$ valószínűségi változó karakterisztikus függvénye. Mennyi $t \in \mathbb{R}$ -re a $\lim_{n \rightarrow \infty} \Psi_n(t)$ határérték?
2. Egy forgalmas helyen lévő készpénzautomatát egy nap alatt (feltöltéstől feltöltésig) 500 ember használ. A legkisebb felvehető összeg ezer Ft, a legnagyobb százezer Ft. A bank tapasztalata szerint az emberek átlagosan 20-ezer Ft-ot vesznek fel. Az egyes emberek által felvett összegek függetlenek egymástól. Mennyi pénzzel kell az automatát feltölteni, ha 99%-ig biztosak akarunk lenni benne, hogy nem fogy ki a következő feltöltésig?
3. Az ábrán látható gráf egy diszkrét idejű, időben homogén Markov lánc pozitív valószínűségű egy lépéses átmeneteit mutatja. Osztályozzuk az állapotokat aszerint, hogy melyik melyikkel érintkezik! Minden osztályról állapítsuk meg, hogy

- zárt-e vagy nyílt,
- lényeges-e vagy lényegtelen,
- visszatérő-e vagy átmeneti,
- mennyi a periódusa.



4. Egy kisbolt parkolójában 3 autónak van hely. A parkolóhoz Poisson-folyamat szerint érkeznek az autós vevők, átlagosan 5 percenként. Ha a parkoló tele van, akkor továbbmennek, ha pedig van hely, akkor leparkolnak és bemennek a boltba, ahol exponenciális eloszlású véletlen időt töltenek el, 5 perc várható értékkel, egymástól függetlenül. Vásárlás után azonnal autóba ülnek és elhajtanak. Kezdetben a parkoló üres. Jelölje X_t ($t \geq 0$) a parkolóban lévő autók számát t perc elteltével.
 - (a) Modellezzük X_t -t folytonos idejű Markov láncsal. Adjuk meg az állapotteret és az infinitezimális generátort. (Vigyázat: érdemes észnél lenni. Két bent lévő vevő *egyike* könnyebben elmegy, mint egy vevő önmaga.)
 - (b) Számoljuk ki X_t stacionárius eloszlását.
 - (c) Hosszú idő elteltével közelítőleg mennyi a valószínűsége, hogy a parkolót üresen találjuk?
 - (d) Hosszú idő átlagában hány autó áll a parkolóban?
 - (e) A potenciális autós vevők hány %-át veszíti el a bolt amiatt, hogy kicsi a parkolója?