1

**1. megoldás:**

$$g(z) = \frac{1}{4}z^0 + \frac{1}{4}z^2 + \frac{1}{4}z^4 + \frac{1}{4}z^6 = p_0 z^0 + p_1 z^1 + \ldots,$$ vagyis az eloszlás:

$$p_k = \mathbb{P}(X=k) = \begin{cases} \frac{1}{4}, & \text{ha } k = 0, 2, 4 \text{ vagy } 6 \\ 0, & \text{ha nem.} \end{cases}$$

Ezért

a.) $\mathbb{P}(X=0) = p_0 = \frac{1}{4}$

b.) $\mathbb{P}(X=5) = p_5 = 0$

c.) $\mathbb{E}X = \sum_{k=0}^{\infty} k p_k = 0 \cdot \frac{1}{4} + 2 \cdot \frac{1}{4} + 4 \cdot \frac{1}{4} + 6 \cdot \frac{1}{4} = \frac{12}{4} = 3$

**2. megoldás:**

a.) $\mathbb{P}(X=0) = g(0) = \frac{1}{4}$

b.) $\mathbb{P}(X=0) = g^{(5)}(0) = \left.\frac{0 + 0 + 0 + 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot z}{4}\right|_{z=0} = 0$

c.) $g'(z) = \frac{2z + 4z^3 + 6z^5}{4}$

$\mathbb{E}X = g'(1) = \frac{2+4+6}{4} = 3$

(2) Nevezzük 0. generációnak a kezdeti egyetlen folyamatot, és $n=0,1,2\ldots$-re nevezzük ~~generációnak~~ $(n+1)$-edik generációnak az $n$-edik generáció tagjai által indított alfolyamatokat. Legyen $Z_n$ az $n$-edik generáció elemszáma $(n=0,1,2,\ldots)$. Így $Z_n$ Galton-Watson elágazó folyamat, $Z_0=1$. Az egylépéses utódszám-eloszlás:

| $k$ | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| $p_k=\mathbb{P}(k \text{ utód})$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{4}$ |

,

ennek várható értéke

$$m=\sum_{k=0}^{\infty} kp_k = 0\cdot\frac{1}{4}+1\cdot\frac{1}{2}+2\cdot\frac{1}{4}=1,$$ vagyis

a folyamat <u>kritikus</u>.

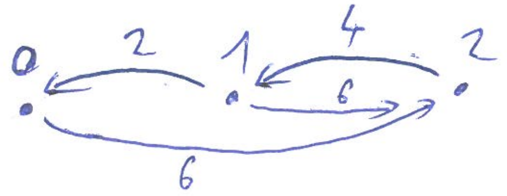
a.) $\underline{\mathbb{P}(\text{lefut})}=\mathbb{P}(\text{a folyamat kihal})=\underline{1},$ mert $m=1$.

b.) A futási idő éppen $N=\sum_{n=0}^{\infty} Z_n$, és erről tudjuk, hogy $\underline{\mathbb{E}N=\infty}$, mert $m=1$.

③

a.) $S=\{0,1,2\}$ a működő körték lehetséges száma

b.)




- 1-ből 0-ba akkor ugrunk, ha az egyetlen működő égő kiég. Ennek rátája $\lambda_{10}=\frac{1}{E(\text{élettartam})}=\frac{1}{\frac{1}{2}}=2.$

- 2-ből 1-be akkor ugrunk, ha a két működő égő valamelyike kiég. Ennek rátája a külön-külön kiégési ráták összege, vagyis $\lambda_{21}=2+2=4.$

- 0-ból és 1-ből is közvetlenül 2-be ugrunk, ha jön a gondnok. Ennek rátája $6\ \left(\frac{\text{látogatás}}{\text{év}}\right)$, vagyis $\lambda_{02}=\lambda_{12}=6.$

c.) $G=\begin{pmatrix}-6 & 0 & 6\\ 2 & -8 & 6\\ 0 & 4 & -4\end{pmatrix}$

- a főátlón kívül az ugrási ráták vannak
- a főátló olyan, hogy minden sorösszeg 0 legyen

③ – folytatás –

d.) A Markov lánc folytonos idejű, irreducibilis és véges állapotterű, ~~az~~ $t = 10$ év hosszú idő, ezért a $\boxed{\text{Markov láncok alaptétele}}$ szerint $\mathbb{P}(X(10)=0 \mid X(0)=2) \approx \pi_0$, ahol $\pi$ az egyetlen stacionárius eloszlás. Ezt kell megkeresni: $G^T \pi^T = 0$, vagyis (Gauss elimináció a szokásos mátrix-jelöléssel)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{-6} & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & 4 & 0 \\ 6 & 6 & -4 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -6 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & 4 & 0 \\ \cancel{0} & \cancel{8} & \cancel{-4} & \cancel{0} \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \frac{1}{2} & 0 \end{array}\right)$$

$\pi_1 = \frac{1}{2}\pi_2$, $\pi_0 = \frac{1}{3}\pi_1$. Pl. $\pi_2 = 6$ választással

$\tilde{\pi} = (1 \quad 3 \quad 6)$ a lineáris egyenletrendszer egy megoldása – a többi ennek számszorosa. Nekünk az kell, amelyiknél a sorösszeg 1, vagyis

$$\pi = \left(\frac{1}{10} \quad \frac{3}{10} \quad \frac{6}{10}\right).$$

Válasz: $\boxed{\mathbb{P}(X(10)=0 \mid X(0)=2) \approx \pi_0 = \frac{1}{10}}$

e.) Legyen az $f$ megfigyelhető mennyiség ~~fl~~ $f: S \to \mathbb{R}$.

$f(k) = \begin{cases} 1, & \text{ha } k = 0 \text{ (sötét van)} \\ 0, & \text{ha nem} \end{cases}$, vagyis $f = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

A kérdés $f(X(t))$ időátlaga, ami az $\boxed{\text{ergodtétel}}$ szerint

$$= \boxed{\mathbb{E}_\pi f} = \sum_{k \in S} \pi_k f(k) = \pi f = (\pi_0 \quad \pi_1 \quad \pi_2)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \pi_0 = \boxed{\frac{1}{10}}$$

(mert a Markov lánc irreducibilis és véges állapotterű.

(4) Legyen $X_i$ az $i$-edik felhasználó sávszélesség-igénye (a szálban forgó csúcsidőbeli pillanatban), $i = 1, 2, \dots, n$ ahol $n = 450$ a felhasználók száma. Így $S_n = X_1 + \dots + X_n$ az össz-igény, és a kérdés

$$\mathbb{P}(S_n > 1300) \leq ?$$

(Mindent $\frac{\text{Mbit}}{\text{sec}}$-ban számolok)

$X_i$ korlátos, méghozzá ~~$0 = a_i \leq X_i \leq b_i = 2$~~

- $0 = a_i \leq X_i \leq b_i = 2$ 100 db $i$-re (1-es csomag)
- $0 = a_i \leq X_i \leq b_i = 3$ 300 db $i$-re (2-es csomag)
- $0 = a_i \leq X_i \leq b_i = 6$ 150 db $i$-re (3-as csomag).

A várható értéke pedig

$$\mathbb{E} X_i = \begin{cases} 1 & 100 \text{ db } i\text{-re (1-es csomag)} \\ 2 & 300 \text{ db } i\text{-re (2-es csomag)} \\ 3 & 150 \text{ db } i\text{-re (3-as csomag)} \end{cases}$$

Vagyis

$$\sum_{i=1}^{n} (b_i - a_i)^2 = 100 \cdot (2-0)^2 + 300 \cdot (3-0)^2 + 150 \cdot (6-0)^2 = 400 + 2700 + 5400 = 8500$$

$$\mathbb{E} S_n = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E} X_i = 100 \cdot 1 + 300 \cdot 2 + 150 \cdot 3 = 1150.$$

Ezért a $\boxed{\text{Hoeffding egyenlőtlenség}}$ szerint $t = 150$ választással

$$\underline{\mathbb{P}(S_n > 1300)} = \mathbb{P}(S_n > \mathbb{E} S_n + t) \,\underline{\leq}\, \exp\left(-\frac{2t^2}{\sum_{i=1}^{n}(b_i - a_i)^2}\right) = e^{-\frac{2 \cdot 150^2}{8500}}$$

$$\approx e^{-5.29} \approx \underline{0.00502}$$