Felsőbb Matematika Informatikusoknak - Sztochasztika
2. ZH minta

2015 ősz

A ZH-n 3 feladat lesz, ezek mindegyike 6 vagy 7 pontot fog érni. Ebbe nem fér bele minden feladattípusból $1-1$, ezért a 3 feladat véletlenszerűen lesz kiválasztva az alábbi típuspéldákhoz nagyon hasonló feladatok közül, valamint esetleg a házi feladatokhoz nagyon hasonló feladatok közül. (A két csoport között jelentős az átfedés, de nincs tartalmazás.)

1. Pistike e-mail címére munkahelyi levelek, magánlevelek és spam érkezik. Munkahelyi levélből átlagosan kétóránként egy, magánlevélből kétóránként három, spamből pedig óránként egy.

   a.) Mennyi a valószínűsége, hogy 10:00 és 18:00 között pont 3 munkahelyi emailt kap?

   b.) Mennyi a valószínűsége, hogy 10:00 és 12:00 között a háromféle levélből összesen 4-et kap?

   c.) Mennyi a valószínűsége, hogy 10:00 és 12:00 között összesen 4 levelet kap, de ebből egy se spam?

2. Legyenek $X_1, X_2, \dots$ független valószínűségi változók, melyek eloszlása egyenletes a $[0, 1]$ intervallumon. Legyen

$$M_n = \max\{X_1, \dots, X_n\}$$

   és legyen F_n az M_n eloszlásfüggvénye, vagyis $F_n(x) := \mathbb{P}(M_n < x)$.

   a.) Számoljuk ki az F_n eloszlásfüggvényt. *Segítség: az $\{X_1, \dots, X_n\}$ maximuma persze pontosan akkor kisebb x-nél, ha minden X_i külön-külön kisebb x-nél.*

   b.) Legyen $Y_n = n(1 - M_n)$ és legyen G_n az Y_n eloszlásfüggvénye. Számoljuk ki a G_n eloszlásfüggvényt. *Segítség:* $\mathbb{P}(Y_n < y) = \mathbb{P}(n(1 - M_n) < y) = \mathbb{P}(M_n > 1 - \frac{y}{n})$.

   c.) Számoljuk ki a $G(y) := \lim_{n\to\infty} G_n(y)$ határértéket.

   d.) A valószínűségi változók gyenge konvergenciájának eloszlásfüggvényes definíciója alapján mutassuk meg, hogy az Y_n sorozat gyengén konvergens, és nevezzük meg a határeloszlást.

3. Egy béka egy hosszú lépcsősoron ugrál felfelé, de egyre fárad: annak valószínűsége, hogy az n-edik ugrással sikerül egy lépcsővel feljebb kerülnie, p_n a korábbi ugrásoktól függetlenül, és sajnos p_n csökken. Mennyi a valószínűsége, hogy kitartóan próbálkozva mégis akármilyen magasra feljut, ha

   a.) $p_n = \frac{1}{n^2}$

   b.) $p_n = \frac{1}{n}$

   Segítség: használjuk a Borel-Cantelli lemmákat.

4. a.) A standard normális eloszlás karakterisztikus függvénye $\Psi_{\mathcal{N}(0,1)}(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}$. Ennek alapján számoljuk ki egy tetszőleges $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ normális eloszlás karakterisztikus függvényét. *(Segítség: Használjuk ki, hogy ha $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$ és $Y = m + \sigma X$, akkor $Y \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$. Használjuk továbbá a karakterisztikus függvény definícióját: $\Psi_{\mathcal{N}(0,1)}(t) = \Psi_X(t) := \mathbf{E}(e^{itX})$ és $\Psi_{\mathcal{N}(m,\sigma^2)}(t) = \Psi_Y(t) := \mathbf{E}(e^{itY})$.)*

   b.) Legyenek U és V független normális eloszlású valószínűségi változók: $U \sim \mathcal{N}(m_1, \sigma_1^2)$, $V \sim \mathcal{N}(m_2, \sigma_2^2)$. Legyen $Z = X + Y$. Számoljuk ki Z karakterisztikus függvényét, és ebből mondjuk meg Z eloszlását! *(Segítség: Használjuk ki, hogy független X-re és Y-ra $\Psi_{X+Y}(t) = \Psi_X(t) \cdot \Psi_Y(t)$, és hogy a karakterisztikus függvény egyértelműen meghatározza az eloszlást.)*

5. a.) Legyen az X valószínűségi változó pesszimista geometriai eloszlású $p \in (0,1)$ paraméterrel, vagyis $\mathbb{P}(X = k) = q^k p$ $(k = 0, 1, \dots)$, ahol $q := 1 - p$. Számoljuk ki X generátorfüggvényét – vagyis a $g_X(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(X = k) z^k$ függvényt. *(Segítség: $\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$, ha $-1 < x < 1$.)*

   b.) Egy Y nemnegatív egész értékű valószínűségi változó generátorfüggvénye $g_Y(z) = \frac{2+3z+4z^3+z^7}{10}$. Határozzuk meg ebből Y eloszlását, vagyis hogy melyik $k \in \mathbb{N}$ értéket mekkora valószínűséggel veszi fel. *(Segítség: ezt a generátorfüggvényt könnyen fel lehet írni $g_Y(z) = \sum_k p_k z^k$ alakban.)*

6. Egy X valószínűségi változó generátorfüggvénye $g(z) = \left(\frac{1}{2-z}\right)^3 e^{3(z-1)}$.

   a.) Mennyi X várható értéke?

   b.) Mennyi X szórása?

7. Móricka programot írt, de nem tudja lefordítani, mert van benne egy hiba, így a fordító kiír egy hibaüzenetet. Ezért Móricka módosít valamit a programon, de sajnos nem érti a hibaüzenetet. Ezért a módosítás csak $\frac{4}{10}$ valószínűséggel vezet a hiba megszűnéséhez, $\frac{6}{10}$ valószínűséggel viszont egy újabb hibát hoz létre (miközben a régi hiba is megmarad). Ezután Móricka újra megpróbálja lefordítani a programot, és ha van hiba, akkor minden hiba után kap egy hibaüzenetet. Ekkor mindegyik hibát megpróbálja kijavítani, majd újra megpróbálja lefordítani, stb. A folyamat során Móricka két fordítási kísérlet között mindig minden hibát megpróbál kijavítani, és a javítási kísérletek egymástól függetlenül mindig $\frac{4}{10}$ valószínűséggel sikeresek, illetve $\frac{6}{10}$ valószínűséggel vezetnek újabb hibához.

   a.) Mennyi a valószínűsége, hogy Mórickának legfeljebb 4 próbálkozásból sikerül lefordítania a programot (a legelső, sikertelen kísérletet nem beleértve)?

   b.) Mennyi a (legelső sikertelent követő) negyedik fordítási kísérlet során talált hibák számának várható értéke?

   c.) Mennyi a valószínűsége, hogy a program valaha is lefordítható lesz?