

## 2. ZH pótlása

2015. december 14. 10:00

Felsőbb Matematika Informatikusoknak – Sztochasztika

Munkaidő: 50 perc. Minden feladat  $6\frac{2}{3}$  pontot ér.

1. Egy szelet mazsolás-diós kalácsban átlagosan 10 gyümölcsdarab van, ebből 3 diódarab (a többi mazsola). Móricka és Pistike is vett egy-egy ilyen kalácsot.
  - a.) Körülbelül mennyi a valószínűsége, hogy Móricka pont 10 gyümölcsdarabot talál benne?
  - b.) Móricka eldicsekedett Pistikének, hogy ő a kalácsában pont 10 gyümölcsdarabot talált, és mind mazsola volt. Ezek után körülbelül mennyi a valószínűsége, hogy a Pistike kalácsa is ugyanilyen?
2. Egy béka diszkrét idejű, *lusta* szimmetrikus bolyongást végez a  $\mathbb{Z}$  rácson időfüggő ugrási valószínűségekkel: az  $n$ -edik lépésben  $\frac{p_n}{2}$  valószínűséggel ugrik 1-et jobbra,  $\frac{p_n}{2}$  valószínűséggel ugrik 1-et balra, a maradék  $q_n = 1 - p_n$  valószínűséggel pedig helyben marad. A béka egyre lustább:  $p_n = \frac{1}{2^n}$ . Jelöljük  $X_n$ -nel a béka helyét  $n$  ugrás után. Mutassuk meg, hogy  $X_n$  majdnem biztosan konvergens. *(Tipp: Ha a béka minden ugrása ugyanolyan hosszú, hogyan fordulhat elő mégis, hogy a helye konvergens?)*
3. Egy bank pénztáránál minden ügyfél kiszolgálása pontosan 1 percig tart. Ez alatt az 1 perc alatt az újonnan érkező, és a sorba beálló ügyfelek száma 0, 1 vagy 2 lehet,  $\frac{1}{3}$ - $\frac{1}{3}$  valószínűséggel, az előzményektől függetlenül. Közvetlenül a 0 időpont előtt a sor üres, de 0-kor megérkezik az első ügyfél, Móricka.
  - (a) Mennyi a valószínűsége, hogy a sor még valaha egyszer újra üres lesz?
  - (b) Mennyi a kiszolgált ügyfelek számának várható értéke, mielőtt a sor újra üres lesz?

*(Tipp: Amíg Mórickát kiszolgálják, véletlen számú új ügyfél érkezik. Nevezzük őket „első generáció”-nak.)*