Felsőbb Mat. Inf. (+ Vill. vizsgakurzus) Sztech félvizsga megoldókulcs 2015.05.26 Mogy

Info 1

Legyen A_n az az esemény, hogy az n-edik ugrás sikeres. Ekkor $\limsup A_n = \{$Az A_n-ek közül ∞ sok teljesül$\}$ éppen az az esemény, hogy akármilyen magasra feljut. $\mathbb{P}(\limsup A_n) = ?$, ahol $\mathbb{P}(A_n) = p_n$

a.) $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty$, így az 1. Borel-Cantelli lemma miatt $\boxed{\mathbb{P}(\limsup A_n) = 0}$

b.) $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$ és az A_n-ek függetlenek, így a 2. Borel-Cantelli lemma miatt $\boxed{\mathbb{P}(\limsup A_n) = 1}$

Villamos 1

Legyen a legelső szörny egymaga a szörnyek 0 generációja. Akik az ő legyőzése alatt érkeznek, azok legyenek az 1 generáció. ... Akik az n. generáció tagjainak legyőzése alatt érkeznek, azok legyenek az $(n+1)$-edik generáció. Legyen Z_n az n-edik generáció elemszáma. Így Z_n Galton-Watson elágazó folyamat, $Z_0 = 1$, és az egylépéses utódszám-eloszlás X:

k	0	1	2
$\mathbb{P}(X=k) = \mathbb{P}(k \text{ utód})$	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{4}{10}$

$\Longrightarrow m = \mathbb{E}X = \frac{3}{10}\cdot 1 + \frac{4}{10}\cdot 2 = 1.1$

$$g(z) = \mathbb{E}(z^X) = \frac{3}{10}\cdot z^0 + \frac{3}{10} z^1 + \frac{4}{10}\cdot z^2 = \frac{3+3z+4z^2}{10}$$

Móricka pontosan akkor teljesíti a szintet, ha a folyamat kihal. Vagyis $r = \mathbb{P}(\text{kihalás}) = ?$

Mivel $m > 1$, a folyamat szuperkritikus $\Longrightarrow$ számolni kell és $\boxed{r < 1.}$

Meg kell oldani a $z = g(z)$ egyenletet: $z = \frac{3+3z+4z^2}{10} \Longrightarrow$

$\Longrightarrow 4z^2 - 7z + 3 = 0 \quad \to \cancel{z=1}$ vagy

$(z-1)(4z-3) = 0 \quad \to \boxed{z = \frac{3}{4}}$

$$\boxed{r = \mathbb{P}(\text{kihalás}) = \frac{3}{4}}$$

(2) Legyen X_k a k-adik utas által feladott poggyász tömege kg-ban

$k = 1, 2, \ldots, n$, $n = 200$. $S_n := X_1 + \ldots + X_n$ az össztömeg, $\mathbb{P}(S_n > 3500) \approx ?$

Az X_k-k függetlenek, korlátosak és a várható értékük ismert:

$$0 \le a_k \le X_k \le b_k = 20 \quad \text{és} \quad \mathbb{E}X_k = 8 \qquad 150 \text{ db } k\text{-ra}$$

és $20 \le a_k \le X_k \le b_k = 40$ és $\mathbb{E}X_k = 30$ a többi 50 db k-ra.

Így $\mathbb{E}S_n = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}X_k = 150 \cdot 8 + 50 \cdot 30 = 2700$

$$\Rightarrow \mathbb{P}(S_n > 3500) = \mathbb{P}(S_n > \mathbb{E}S_n + t) = ? \quad \text{ahol} \quad t := 800.$$

A Hoeffding-egyenlőtlenség szerint

$$\mathbb{P}(S_n > \mathbb{E}S_n + t) \le \exp\left(-\frac{2t^2}{\sum_{k=1}^{n}(b_k - a_k)^2}\right).$$

Esetünkben $\sum_{k=1}^{n}(b_k - a_k)^2 = 150 \cdot 20^2 + 50 \cdot 20^2 = 80000$

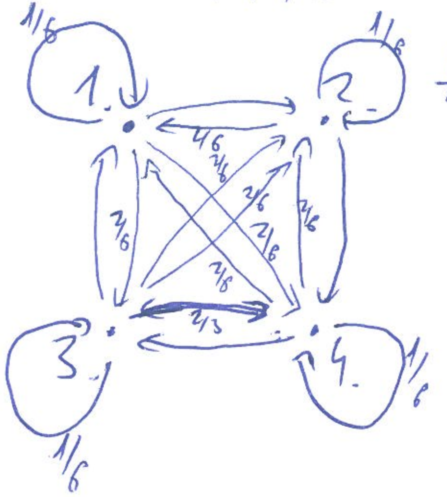
$$\Rightarrow \boxed{\mathbb{P}(S_n > 3500) \le \exp\left(-\frac{2 \cdot 800^2}{80000}\right)}$$

$$= e^{-16} \approx 1.12 \cdot 10^{-7}$$

Felsőbb Mat. Inf. (+vill. vizsgakurzus) <u>Sztech</u> félvizsga megoldókulcs 2015.05.26 Mogy

3/5

③ Legyen $S=\{1,2,3,4\}$ az állapottér: gyerekek megszámozva körben felülnézetből.



A maci helyben maradni csak $1/6$ val.-séggel tud (4-es dobás), balra lépni szintén $1/6$ val.séggel (3-es dobás), a maradék két átmenet val. sége $2/6$

(1-es $\vee$ 5-ös, ill. 2-es $\vee$ 6-os).

a.) Az átmenetmátrix

$$P=\begin{pmatrix} 1/6 & 2/6 & 2/6 & 1/6 \\ 1/6 & 1/6 & 2/6 & 2/6 \\ 2/6 & 1/6 & 1/6 & 2/6 \\ 2/6 & 2/6 & 1/6 & 1/6 \end{pmatrix}$$

b.) Legyen Móricka az 1-es játékos.

$$\mathbb{P}(X_2=1 \mid X_0=1)=(P^2)_{11}=\ldots=\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}+\frac{2}{6}\cdot\frac{1}{6}+\frac{2}{6}\cdot\frac{2}{6}+\frac{1}{6}\cdot\frac{2}{6}=\frac{9}{36}=\underline{\underline{\frac{1}{4}}}$$

c.) Keressük a stacionárius eloszlást: $(P^T-I)\pi^T=0$, avagy

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -5/6 & 1/6 & 2/6 & 2/6 & 0 \\ 2/6 & -5/6 & 1/6 & 2/6 & 0 \\ 2/6 & 2/6 & -5/6 & 1/6 & 0 \\ 1/6 & 2/6 & 2/6 & -5/6 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} -5 & 1 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & -5 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & -5 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & -5 & 0 \end{array}\right) \sim \ldots$$

számolás $\pi_1=\pi_2=\pi_3=\pi_4=\frac{1}{4}$

$$\boxed{\pi=\left(\frac{1}{4}\ \frac{1}{4}\ \frac{1}{4}\ \frac{1}{4}\right)}$$

A Markov lánc <u>irreducibilis</u>, <u>aperiodikus</u> és <u>véges állapotterű</u>, $n=100$ lépés <u>hosszú idő</u> $\Rightarrow$ A <u>Markov láncok alaptétele</u> miatt $\boxed{\mathbb{P}(X_{100}=1)\approx\pi_1=\frac{1}{4}}$

(4) Legyen $X(t)$ a Markov lánc.

a.) A G generátor elemei éppen az egyes átmenetek rátái, kivéve a főátlót, amit úgy töltünk ki, hogy a sorösszegek 0-k legyenek:

$$G = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

A Q beágyazott ML-átmenetmátrix elemei $q_{ij} = \dfrac{\lambda_{ij}}{\sum_k \lambda_{ik}}$, ahol λ_{ij}-k az ugrási ráták — kivéve a főátlót, ahol $q_{ii} = 0$:

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 2/4 & 2/4 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/3 & 2/3 & 0 \end{pmatrix}$$

b.) Keressük a stacionárius eloszlást: $G^T \pi^T = 0$, avagy

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -4 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -3 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -4 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{3}{2} & \frac{5}{2} & 0 \\ \cancel{0} & \cancel{\frac{3}{2}} & \cancel{-\frac{5}{2}} & \cancel{0} \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -4 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 5 & 0 \end{array}\right) \quad \pi_1 = \frac{\pi_2 + \pi_3}{4}, \quad \pi_2 = \frac{5\pi_3}{3}$$

Pl $\pi_3 = 3$ választással $\pi_2 = 5$, $\pi_1 = 2$ $\Rightarrow \tilde{\pi} = (2 \ \ 5 \ \ 3)$ egy megoldás, le kell normálni: $\boxed{\pi = \left(\frac{2}{10} \ \ \frac{5}{10} \ \ \frac{3}{10}\right)}$

Mivel a M.L. irreducibilis, véges állapotterű és folytonos idejű, a M.L. alaptétele szerint $\boxed{\mathbb{P}(X(100)=3 \mid X(0)=2) \simeq \pi_3 = \frac{3}{10}}$

Felsőbb Mat. Inf. (+vill. vizsgakurzus) Sztech félvizsga megoldókulcs 2015.05.26

5/5 Nagy

(4) folytatás -

c.) Legyen $f: S \to \mathbb{R}$ $f = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ az $\{1, 2\}$ halmaz indikátora.

Így az $f(X(t))$ függvény időátlagát keressük.

A Markov lánc irreducibilis, véges állapotterű, így az ergodtétel szerint

$$f(X(t)) \text{ időátlaga } \xrightarrow[1 \text{ val. séggel}]{idő \to \infty} \mathbb{E}_{\pi} f = \pi f = \left(\tfrac{2}{10} \ \tfrac{5}{10} \ \tfrac{3}{10}\right) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \boxed{\frac{7}{10}}$$

(5) Csak villamosmérnököknek

Egyoldali, egymintás ~~u-pro~~ u-próbát végzünk, a nullhipotézis

H_0: $m \geq 7000$, ahol m az $X_1, \ldots, X_{10}$ mintaelemek közös várható értéke. Először kiszámoljuk $\bar{x}$-ot:

$$\bar{x} = \frac{X_1 + \ldots + X_{10}}{10} = \frac{7009 + 7023 + \ldots + 6993}{10} = 7000.5$$

Mivel $\bar{x} > 7000$, az adatsor megerősíti a nullhipotézist, így azt számolás nélkül $\boxed{\text{elfogadjuk.}}$