villanykari MSC Mat „Sztochasztika 2" vizsga 2013.01.15 Mogy

(1) $Z_0 := 1$, $Z_1 :=$ az első feladat „utódainak" száma, első generáció.

$Z_2 :=$ az 1. generáció-beli feladatok „utódainak" száma (2. generáció)

⋮ stb

Így Z_k elágazó folyamat, aminek 1-lépéses utódszám-eloszlása

k	0	1	2
$P(X=k)$	$\frac{2}{10}$	$\frac{6}{10}$	$\frac{2}{10}$

. Így $\mathbb{E}X = \frac{2}{10}\cdot 0 + \frac{6}{10}\cdot 1 + \frac{2}{10}\cdot 2 = 1.$

Tehát a folyamat kritikus, ezért

$\mathbb{P}$(előbb-utóbb teljesíti) $= \mathbb{P}$(kihalás) $= 1$.

(2) 1. megoldás: $\tau_i :=$ az i-edik levélre mennyit kell várni az $(i-1)$-edik érkezésétől. Így $\tau_1, \tau_2, \ldots \sim Exp(1)$. $\Rightarrow \mathbb{E}(\tau_i) = 1$ (percben)

$n := 1800$, $T_n := \tau_1 + \tau_2 + \ldots + \tau_n$, és a kérdés

$\mathbb{P}(T_n \le 1440)$, vagyis hogy 1 napon belül megérkezik az 1800-adik levél. Erre a Cramer tétel szerint

$$\mathbb{P}(T_n \le 1400) = \mathbb{P}\left(\frac{T_n}{n} \in \left(0; \frac{1440}{1800}\right)\right) \overset{\mu=1 \Rightarrow m=1}{\underset{a=0,\ b=\frac{1440}{1800}=0.8}{=}} \mathbb{P}\left(\frac{T_n}{n} \in (a,b)\right) \lessapprox$$

$$\overset{b<m}{\lessapprox} \exp(-nI(b)) \approx \underline{\underline{\exp(-41.66) \approx 8.1\cdot 10^{-19}}}$$

$\mu = 1$, $I(x) = x - 1 - \ln x \Rightarrow I(0.8) \approx 0.02314355$

2) **2. megoldás** $X_i :=$ az i-edik percben érkező levelek száma

$X_i \sim Poi(1)$, $n := 1440$, $S_n := X_1 + \dots + X_n$, $EX_i = 1 = m$

A kérdés $\mathbb{P}(S_n \geq 1800)$, ezt Cramer-rel számolva

$$\mathbb{P}(S_n \geq 1800) = \mathbb{P}\left(\frac{S_n}{n} \geq \frac{1800}{1440}\right) = \mathbb{P}\left(S_n/n \in (1.25;\infty)\right) \overset{\text{Cramer}}{\lessapprox}$$

$$\lessapprox \exp\left(-n\, I_{Poi(1)}(1.25)\right) = \dots = \exp(-41.66)$$

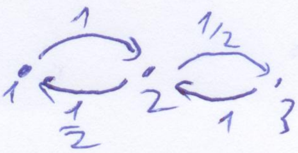
3. megoldás $Y :=$ az 1 nap alatt érkező levelek száma $\sim Poi(1440)$,

erre $n = 1$-gyel is alkalmazható a Cramer tétel, $S_n = Y$

$$\mathbb{P}(Y \geq 1800) = \mathbb{P}\left(\frac{S_n}{n} \geq 1800\right) \leq \exp\left(-1 \cdot I_{Poi(1440)}(1800)\right) = \dots$$

$$\dots = \exp(-41.66).$$

3) a.) $S = \{1, 2, 3\}$



$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac12 & 0 & \frac12 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

b.) A $(P^T - \mathbb{1})\pi^T = 0$ egyenletrendszert kell megoldani:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & \frac12 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & \frac12 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

, ennek a normált megoldása $\boxed{\pi = \left(\frac14 \ \ \frac12 \ \ \frac14\right)}$

c.) A Markov lánc periodikus $d = 2$-vel, az 1-es állapotból a 2-es csak páratlan sok lépésben érhető el $\Rightarrow$

$\Rightarrow \mathbb{P}(X_{60} = 2 \mid X_0 = 1) = 0$.

villanykari MSC Mat „Sztochasztika 2" vizsga 2013. 01. 15 Mogy

4 a) $S = \{1, 2, 3\}$

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r, bend left, "1/2"] & 2 \arrow[l, bend left, "1/2"] \arrow[r, bend left, "1/2"] & 3 \arrow[l, bend left, "1/2"] \end{tikzcd}$$

$$G = \begin{vmatrix} -1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & -1 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & -1/2 \end{vmatrix}$$

b.) A $G^T \pi^T = 0$ egyenletrendszert kell megoldani:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & -1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & -1/2 & 0 \end{array}\right)$$, ennek a normált megoldása $\boxed{\pi = \left(\frac{1}{3} \ \frac{1}{3} \ \frac{1}{3}\right)}$

c.) Irreducibilis folytonos idejű ML eloszlása konvergál a stacionáriushoz és $t = 60$ hosszú idő

$$\Rightarrow P(X_{60} = 2 \mid X_0 = 1) \approx \pi_1 = \underline{\underline{\frac{1}{3}}}$$

5 Illeszkedésvizsgálatot végzünk, a hipotézis szerint

$p_1 = P(\text{fej}) = \frac{1}{2} = P(\text{írás}) = p_2$. Az adatok:

i	1: fej	2: írás
p_i	1/2	1/2
ν_i	540	460

vagyis $r = 2$, $n = 1000$

Ebből $$\chi^2 = \frac{\left(540 - 1000 \cdot \frac{1}{2}\right)^2}{1000 \cdot \frac{1}{2}} + \frac{\left(460 - 1000 \cdot \frac{1}{2}\right)^2}{1000 \cdot \frac{1}{2}} = 6.4$$

Ezt kell összehasonlítani a $df = r - 1 = 1$ szabadsági fokú χ^2-eloszlás $\varepsilon = 0.05$ farok-percentilisével, vagyis $K_\varepsilon = 3.841$-gyel.

Döntés: $\chi^2 > K_\varepsilon \Rightarrow$ a nullhipotézist $\boxed{\text{elvetjük}}$