Sztochasztika 2 vizsga Felsőbb matematika tárgy.

2013. január 22. 12:00. Munkaidő: 70 perc. Minden feladat 5 pontot ér.

1. Egy eldöntendő kérdés megválaszolására írt randomizált algoritmus $p = \frac{6}{10}$ valószínűséggel ad helyes választ. Hogy a biztonságot növeljük, az algoritmust N-szer futtatjuk le egymástól függetlenül, és azt a választ fogadjuk el, amelyik többször jön ki. Hogyan válasszuk meg N-et, ha biztosak akarunk lenni benne, hogy végső döntésünk legfeljebb 10^{-8} valószínűséggel hibás? *(Hibásnak tekintjük azt is, ha a két válasz pont ugyanannyiszor jön ki.)*

   (Segítség: a p paramétrű Bernoulli eloszlás Cramér féle rátafüggvénye $I(x) = x \ln \frac{qx}{p(1-x)} + \ln \frac{1-x}{q}$, ahol $q = 1-p$ és $0 < x < 1$.)

2. Egy szóbeli vizsgán az oktató elvből csak egyest vagy ötöst ad. A hallgató a vizsga során az $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ állapotokban lehet. Az oktató percenként kérdéseket tesz fel. A hallgató minden kérdésre az előzményektől függetlenül $\frac{2}{3}$ valószínűséggel tudja a választ, és akkor eggyel magasabb állapotba kerül, illetve $\frac{1}{3}$ valószínűséggel nem tudja, és akkor eggyel alacsonyabb állapotba kerül. A vizsga akkor ér véget, ha a hallgató eléri az 1 vagy az 5 állapotot – ekkor végleg ebben az állapotban marad, és megkapja az ennek megfelelő jegyet.

   a.) Modellezzük a hallgató állapotát Markov lánccal. Rajzoljuk fel a gráf-reprezentációt és írjuk fel az átmenetmátrixot.

   b.) Osztályozzuk az állapotokat, és viszgáljuk meg őket lényegesség, visszatérés és periódus szempontjából.

   c.) Mik a Markov lánc stacionárius eloszlásai?

   d.) **Bónusz:** Mennyi a valószínűsége, hogy a hallgató végül ötöst kap, ha a 3-as állapotból indul? *(Segítség: jelölje r_k annak a feltételes valószínűségét, hogy a hallgató végül ötöst kap, feltéve, hogy a k állapotban van ($k = 1, 2, 3, 4, 5$). Keressünk összefüggéseket az egyes r_k-k között a teljes valószínűség tétel segítségével.)*

3. Móricka egy öt feladatból álló vizsga-feladatsoron dolgozik, és kapkod: minden feladattal az előzményektől független, exponenciális eloszlású véletlen időt tölt, aztán továbbugrik a következő feladatra. Ha végigért, az elején újakezdi – vagyis az 5. feladatról az elsőre ugrik. Az egyes feladatok esetén a továbbugrás rátái (az időt percben mérve) rendre 1; 1/2; 1; 1/2; 1/3. A vizsga időtartama 70 perc.

   a.) Modellezzük Móricka kapkodását folytonos idejű Markov lánccal. Rajzoljuk fel a gráf-reprezentációt és írjuk fel az infinitezimális generátort. (Az időt mérjük percben.)

   b.) Közelítőleg, várhatóan hány percet fog Móricka a hármas feladattal tölteni?

   c.) Közelítőleg mennyi annak a valószínűsége, hogy a vizsga végekor éppen a hármas feladaton dolgozik?

4. Egy készülék élettartama órákban mérve abszolút folytonos valószínűségi változó, melynek sűrűségfüggvénye

$$f(x) = \begin{cases} \lambda^2 x e^{-\lambda x}, & \text{ha } x > 0 \\ 0, & \text{ha nem} \end{cases},$$

   ahol λ ismeretlen pozitív paraméter. Néhány ilyen készülék élettartamát megmértük, és a következő eredményeket kaptuk (órákban): 11.8; 13.3; 12.1; 17.8; 11.4; 13.5; 12.0. Adjunk maximum likelyhood becslést a λ paraméter értékére.

   (Megjegyzés: Az eloszlás a $k = 2$ alakparaméterű, λ ráta-paraméterű Γ-eloszlás, és olyan készüléket modellez, ahol egy exponenciális élettartamú alkatrész mellett egy vele azonos pótalkatrész van, ami az első meghibásodásakor lép működésbe – vagyis az élettartam két független exponenciális összege.)

5. Egy pszeudo-véletlen biteket generáló program esetén azt szeretnénk tesztelni, hogy két egymást követő bit függetlennek tekinthető-e. Ezért független mintát vettünk a program által generált bit-*párokból*, és a következő eredményt kaptuk: $(0;0)$-ból 250 darab, $(0;1)$-ből 270 darab, $(1;0)$-ból 231 darab, $(1;1)$-ből 249 darab.

   Viszgáljuk meg 95%-os szinten azt a hipotézist, hogy két egymást követő bit független.