1) **I. megoldás:** Cramér tétellel: $X_1, \ldots, X_n \sim B(p)$ $\quad p = \frac{6}{10}, \quad n = N$

$$S_n := X_1 + \ldots + X_n$$

$$P\left(\frac{S_n}{n} \le \frac{1}{2}\right) \overset{\text{Cramér}}{\approx} e^{-nI\left(\frac{1}{2}\right)} = e^{-n\left[\frac{1}{2}\ln\frac{q^{1/2}}{p^{1/2}} + \ln\frac{1/2}{q}\right]} =$$

$$= e^{-\frac{n}{2}\ln\frac{q}{p4q^2}} = e^{\frac{n}{2}\ln(4pq)}$$

Cél:

$$e^{\frac{n}{2}\ln(4pq)} = 10^{-8}$$

$$\frac{n}{2}\ln(4pq) = -8\ln 10 \qquad n \ge \frac{-16\ln 10}{\ln\left(4\cdot\frac{6}{10}\cdot\frac{4}{10}\right)} \approx 903$$

II. megoldás: Hoeffding, $X_1, \ldots, X_n \sim B(p)$ $\quad p = \frac{6}{10} \quad n = N$

$$S_n = X_1 + \ldots + X_n, \quad ES_n = np$$

$$P(S_n \le ES_n - t) \le \exp\left(-\frac{2t^2}{\sum (b_i - a_i)^2}\right) \qquad t := \frac{n}{10}$$

$$b_i = 1, \quad a_i = 0$$

$$:= \frac{n}{2} = n\cdot\frac{6}{10} - n\cdot\frac{1}{10}$$

$$:= 10^{-8}$$

$$\exp\left(-\frac{2\left(\frac{n}{10}\right)^2}{n\cdot 1^2}\right) = 10^{-8}$$

$$\frac{2n}{100} = 8\ln 10 \qquad n \ge 400\cdot\ln 10 \approx 920$$

2) a)

$$1 \overset{1}{\circlearrowleft} 1 \xleftarrow{1/3} 2 \underset{2/3}{\overset{1/3}{\rightleftarrows}} 3 \underset{2/3}{\overset{1/3}{\rightleftarrows}} 4 \xrightarrow{2/3} 5 \overset{1}{\circlearrowleft}$$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 0 & 2/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 & 2/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 0 & 2/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

b) Osztályok: $\{1\}$, $\{5\}$ lényeges, rekurrens, aperiodikus

$\{2,3,4\}$ lényegtelen, tranziens, $d=2$ szerint periodikus villamos MSc Sztoch2 vizsga 2012.01.22 — 2 — Mogy

(2) Fel.

c.) Stac. eloszlások a $\pi P = \pi$ egyenletrendszer megoldásai

$(P^T - I)\pi^T = 0$, vagyis

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac13 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac13 & 0 & 0 \\ 0 & \frac23 & 0 & \frac13 & 0 \\ 0 & 0 & \frac23 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac23 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

, vagyis $\pi_2 = \pi_3 = \pi_4 = 0$, π_1 és π_5 tetszőleges

$$\boxed{\pi = (p;\ 0;\ 0;\ 0;\ q), \text{ ahol } p+q=1}$$

d.) ~~Teljes valség tétel~~ Első lépés szerint felbontás

$r_0 = 0$ (persze)

$r_1 = \frac13 r_0 + \frac23 r_2$ teljes val. ség tétel

$r_2 = \frac13 r_1 + \frac23 r_3$

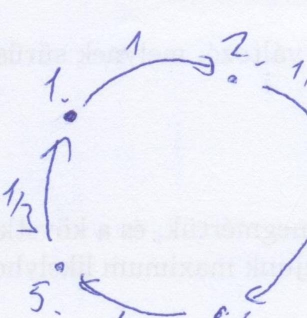
$r_3 = \frac13 r_2 + \frac23 r_4$

$r_4 = \frac13 r_3 + \frac23 r_5$

$r_5 = 1$ (persze)

Ezt megoldva $r = \left(\frac{16}{31}\ \ \frac{24}{31}\ \ \boxed{\frac{28}{31}}\ \ \frac{30}{31}\ \ 1\right)$

(3) a)



$$G = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac12 & \frac12 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac12 & \frac12 \\ \frac13 & 0 & 0 & 0 & -\frac13 \end{pmatrix}$$

b.) A stac. eloszláshoz $\pi G = 0$ vagyis $G^T\pi^T = 0$-t

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & \frac13 \\ 1 & -\frac12 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac12 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac12 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac12 & -\frac13 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

-t megoldva $\pi = \left(\frac19;\ \frac29;\ \frac19;\ \frac29;\ \frac39\right)$ vagyis az ergodtétel miatt kb. az idő $\pi_3 = \frac19$-ét, vagyis $\frac{70}{9} \approx 7.8$ percet tölt a 3. feladattal.

villamos MSc Stoch2 vizsga 2012. 01.22 — 3 — Mogy

(3) c) 70 perc hosszú idő, ekkor

$$P(X_{70}=3 \mid X_0=1) \approx \pi_3 = \frac{1}{9}$$

(4)

$$L(\lambda) = \prod_{i=1}^{n} f_\lambda(x_i) = \prod_{i=1}^{n} \lambda^2 x_i e^{-\lambda x_i}$$

$$\ell(\lambda) = \ln L(\lambda) = \sum_{i=1}^{n} \left[2\ln\lambda + \ln x_i - \lambda x_i \right]$$ maximumhelyét keressük

$$= 2n\ln\lambda + \sum \ln x_i - \lambda \sum x_i$$

$$0 := \ell'(\lambda) = \frac{2n}{\lambda} - \sum_{i=1}^{n} x_i$$

amiből $\boxed{\lambda_{ML} = \frac{2n}{\sum_{i=1}^{n} x_i}}$ Esetünkben $n=7$ $\sum x_i = 91.9$

$$\Rightarrow \boxed{\lambda_{ML} = \frac{14}{91.9} = 0.1523}$$

(5) (X,Y) legyen a számpár, y_i a találat-számok

$X_i \backslash Y_i$	0	1	
ν_i: 0	250	270	$n=520$
μ_i: 1	231	249	$m=480$
Σ	481	519	

Függetlenségvizsgálat vagy homogenitás-vizsgálat végezhetünk — jelen esetben tökmindegy.

$df = 1$, $\varepsilon = 0.05$ $K = 3.841$ a küszöb

$r = 2$

pl. homogenitással

$$\chi^2 = nm \sum_{i=1}^{r} \frac{\left(\frac{\nu_i}{n} - \frac{\mu_i}{m}\right)^2}{\nu_i + \mu_i} = 520 \cdot 480 \left[\frac{\left(\frac{250}{520} - \frac{231}{480}\right)^2}{481} + \frac{\left(\frac{270}{520} - \frac{249}{480}\right)^2}{519} \right] = \cancel{2.39}\ 2.4 \cdot 10^{-4}$$

$\chi^2 < K \Rightarrow$ elfogadjuk a nullhipotézist.