

5.1

Legyen az állapotter $S = \{ \text{Természeti védelem}; \text{Műszaki}; \text{Gazdasági} \} \equiv \{ 1, 2, 3 \}$

a.) Így a sorveg alapján

$$\frac{1}{\lambda_1} = E(\text{TTK-nál töltött idő}) = \frac{1}{4} \text{ (év)} \quad [= 3 \text{ hónap}]$$

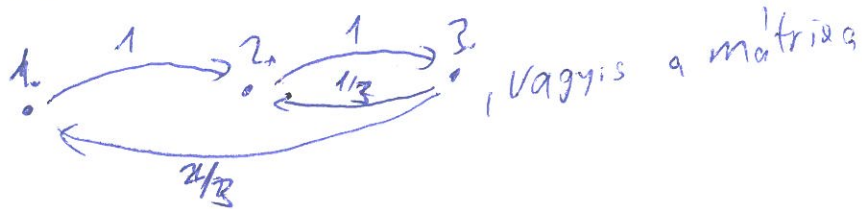
$$\frac{1}{\lambda_2} = E(\text{MK-nál töltött idő}) = \frac{1}{6} \text{ (év)} \quad [= 2 \text{ hónap}]$$

$$\frac{1}{\lambda_3} = E(\text{GH-nál töltött idő}) = \frac{1}{12} \text{ (év)} \quad [= 1 \text{ hónap}]$$

vagyis a tartózkodási idő paraméter vektor

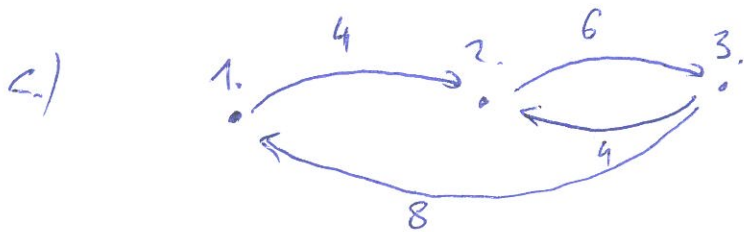
$$\underline{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (4, 6, 12)$$

A beépített diszkrét idejű Markov láncc grafikusán:



$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}$$

b.) $\lambda_{ij} = \lambda_i Q_{ij}$, vagyis $\underline{\lambda} = (\lambda_{ij}) = \begin{pmatrix} * & 4 & 0 \\ 0 & * & 6 \\ 8 & 4 & * \end{pmatrix}$



d.) $G = \begin{pmatrix} -\lambda_1 & \lambda_{12} & \lambda_{13} \\ \lambda_{21} & -\lambda_2 & \lambda_{23} \\ \lambda_{31} & \lambda_{32} & -\lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 4 & 0 \\ 0 & -6 & 6 \\ 8 & 4 & -12 \end{pmatrix}; \quad \pi(0) = (0, 0, 1)$

Mert a sorveg szerint az akta a gazdasági hivatalból indul.

5.1 Polytatás

-2-

e.) A $G^T \pi^T = 0$ lineáris egyenletrendszer kell megoldani:

a stokásos mátrix-jelöléssel

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -4 & 0 & 8 & 0 \\ 4 & -6 & 4 & 9 \\ 0 & 6 & -12 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{2.\text{ sor} + 1.\text{ sor}} \left(\begin{array}{ccc|c} -4 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & -6 & 12 & 9 \\ 0 & 6 & -12 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{3.\text{ sor} + 2.\text{ sor}} \left(\begin{array}{ccc|c} -4 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & -6 & 12 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \end{array} \right)$$

$$\begin{array}{l} 1.\text{ sor} \div = 4 \\ 2.\text{ sor} \div = 6 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \end{array} \right) \text{ vagyis } \begin{array}{l} \pi_1 = 2\pi_3 \\ \pi_2 = 2\pi_3 \end{array} \text{ megoldás pl. } \tilde{\pi} = (2 \ 2 \ 1)$$

a stoc. osztás pedig ennek 1-re normáltja:

$$\boxed{\pi = \left(\frac{2}{5} ; \frac{2}{5} ; \frac{1}{5} \right)}$$

f.) $t = 7$ nap ≈ 0.02 év rövid idő, így

$$\begin{aligned} P(X_t = 3 | X_0 = 3) &= P_{33}(t) \approx (\mathbb{1} + tG)_{33} = 1 - t\lambda_3 = \\ &= 1 - 0.02 \cdot 12 = 0.76. \end{aligned}$$

[Ez annak a közelítő valószínűsége, hogy 7 nap alatt nem történik semmi]

$$\begin{aligned} g.) P(X_t = 2 | X_0 = 3) &= P_{32}(t) \stackrel{\text{6. tábla}}{\approx} (\mathbb{1} + tG)_{32} = 0 + t \cdot \lambda_{32} = \\ &= 0.02 \cdot 4 = 0.08 \end{aligned}$$

[Ez annak a közelítő valószínűsége, hogy 7 nap alatt a GH áttolja az 2-t az MH-ba, és más nem történik.]

h.) $t = 15$ év hosszú idő. A Markov lánc irreducibilis és véges állg-potterű, így a M.L. alaplétele szerint $P(X_t = 1) \approx \pi_1 = \underline{\underline{\frac{2}{5}}}$.

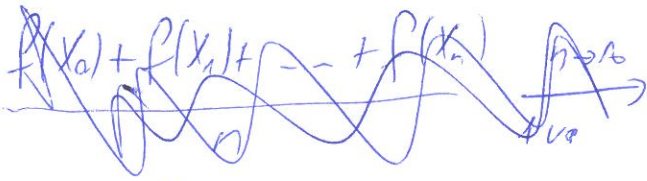
~~a.) $\pi = \left(\frac{2}{5} ; \frac{2}{5} ; \frac{1}{5} \right)$ megfigyelhető~~

5.1 folytonos/2

- 3 -

i.) Az $f: S \rightarrow \mathbb{R}$ $f(1)=3$, $f(2)=2$, $f(3)=1$ vagyis $f = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

megfigyelhető mennyiség időátlagát keressük. Mivel a M.L. irreducibilis és véges állapotterű, az ergodicitás szerint



$$\frac{1}{T} \int_0^T f(x_t) dt \xrightarrow[\text{1 val. s\u00e9ggel}]{T \rightarrow \infty} E_{\pi} f = \sum_{i \in S} \pi_i f(i) = \pi f =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{8+4+1}{5} = \frac{11}{5}$$

Vagyis hosszú távon napi átlagban $\frac{11}{5} = 2.2$ óra munkát fektetnek az ügybe a hivatalok.