$\boxed{5.1}$

Legyen az állapottér $S = \{\text{Természetvédelmi}; \text{Műszaki}; \text{Gazdasági}\} \equiv \{1, 2, 3\}$

a.) Így a szöveg alapján

$$\frac{1}{\lambda_1} = \mathbb{E}(\text{TTH-nál töltött idő}) = \frac{1}{4} \ (\text{év}) \quad [= 3 \text{ hónap}]$$

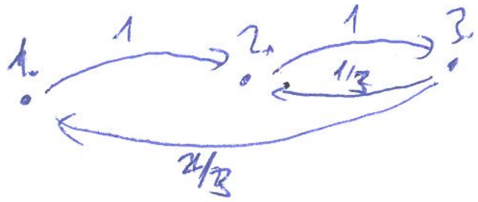
$$\frac{1}{\lambda_2} = \mathbb{E}(\text{MH-nál töltött idő}) = \frac{1}{6} \ (\text{év}) \quad [= 2 \text{ hónap}]$$

$$\frac{1}{\lambda_3} = \mathbb{E}(\text{GH-nál töltött idő}) = \frac{1}{12} \ (\text{év}) \quad [= 1 \text{ hónap}]$$

vagyis a tartózkodási idő paraméter vektor

$$\underline{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (4, 6, 12)$$

A beépített diszkrét idejű Markov lánc grafikusan:

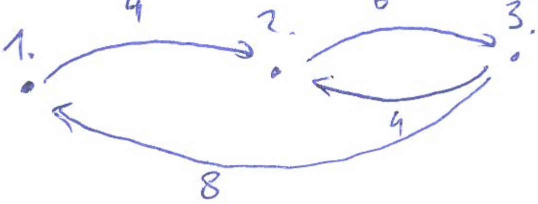


, vagyis a mátrix

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}$$

b.) $\lambda_{ij} = \lambda_i Q_{ij}$, vagyis $\underline{\lambda} = (\lambda_{ij}) = \begin{pmatrix} * & 4 & 0 \\ 0 & * & 6 \\ 8 & 4 & * \end{pmatrix}$

c.)



d.) $G = \begin{pmatrix} -\lambda_1 & \lambda_{12} & \lambda_{13} \\ \lambda_{21} & -\lambda_2 & \lambda_{23} \\ \lambda_{31} & \lambda_{32} & -\lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 4 & 0 \\ 0 & -6 & 6 \\ 8 & 4 & -12 \end{pmatrix}$; $\underbrace{\Pi(0) = (0, 0, 1)}$

Mert a szöveg szerint az akta a gazdasági hivatalból indul.

5.1 folytatás

e.) A $G^T \Pi^T = 0$ lineáris egyenletrendszert kell megoldani: a szokásos mátrix-jelöléssel

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -4 & 0 & 8 & 0 \\ 4 & -6 & 4 & 0 \\ 0 & 6 & -12 & 0 \end{array}\right) \overset{2.\,sor += 1.\,sor}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} -4 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & -6 & 12 & 0 \\ 0 & 6 & -2 & 0 \end{array}\right) \overset{3.\,sor += 2.\,sor}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} -4 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & -6 & 12 & 0 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \end{array}\right)$$

$$\underset{\substack{1.\,sor \div= 4 \\ 2.\,sor \div= 6}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \end{array}\right)$$ vagyis $\Pi_1 = 2\Pi_3$, $\Pi_2 = 2\Pi_3$ megoldás pl. $\tilde{\Pi} = (2 \;\; 2 \;\; 1)$,

a stac. eloszlás pedig ennek 1-re normáltja:

$$\boxed{\Pi = \left(\frac{2}{5} \,;\; \frac{2}{5} \,;\; \frac{1}{5} \right)}$$

f.) $t = 7$ nap ≈ 0.02 év rövid idő, így

$$\mathbb{P}(X_t = 3 \mid X_0 = 3) = P_{33}(t) \approx (\mathbb{1} + t\,G)_{33} = 1 - t\,\lambda_3 =$$

$$= 1 - 0.02 \cdot 12 = 0.76.$$

[Ez annak a közelítő vd-sége, hogy 7 nap alatt nem történik semmi]

g.) $\mathbb{P}(X_t = 2 \mid X_0 = 3) = P_{32}(t) \overset{t\text{ kicsi}}{\approx} (\mathbb{1} + t\,G)_{32} = 0 + t \cdot \lambda_{32} =$

$$= 0.02 \cdot 8 = 0.16$$

[Ez annak a közelítő val.sége, hogy 7 nap alatt a GH átkolja az aktát az MH-ba, és más nem történik.]

h.) $t = 15$ év hosszú idő. A Markov lánc irreducibilis és véges állapotterű, így a M.L alaptétele szerint $\mathbb{P}(X_t = 1) \approx \Pi_1 = \underline{\underline{\frac{2}{5}}}$.

~~i.) Az $\underline{X} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ megfigyelhető~~

5.1 Folytonos/2

i.) Az $f: S \to \mathbb{R}$ $f(1)=3$, $f(2)=2$, $f(3)=1$ vagyis $f=\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}$ megfigyelhető mennyiség időátlagát keressük. Mivel a M.L. irreducibilis és véges állapotterű, az ergodtétel szerint

$$\cancel{\frac{f(X_0)+f(X_1)+\dots+f(X_n)}{n} \xrightarrow{n\to\infty}}$$

$$\frac{1}{T}\int_0^T f(X_t)\,dt \xrightarrow[1\text{ valószínűséggel}]{T\to\infty} \mathbb{E}_\pi f = \sum_{i\in S}\pi_i f(i) = \pi f =$$

$$= \begin{pmatrix}\frac{2}{5} & \frac{2}{5} & \frac{1}{5}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix} = \frac{6+4+1}{5} = \frac{11}{5}.$$

Vagyis hosszú távon napi átlagban $\frac{11}{5} = 2.2$ óra munkát fektetnek az ügybe a hivatalok.