Felsőbb Matematika Informatikusoknak A,D és Villamosmérnököknek A,B
házi feladatok a „Sztochasztika 2" részhez
2013 ősz

Minden héten összesen egy pontot érnek a kitűzött feladatok.

1.HF: (Beadási határidő: 2013.11.11.)

HF 1.1 Pistike és Móricka a következő játékot játsszák: van két, ránézésre egyforma hatoldalú dobókockájuk, melyek közül az egyik szabályos, azaz $\frac{1}{6} - \frac{1}{6}$ valószínűséggel lesz felül az 1, 2, 3, 4, 5, 6 számok bármelyike, a másik viszont cinkelt: a 6-osnak $\frac{1}{2}$ a valószínűsége, a többi számnak $\frac{1}{10} - \frac{1}{10}$. Találomra elveszi az egyik kockát Pistike, a másikat Móricka, majd elkezdenek dobálni.

(a) Mekkora valószínűséggel választotta Pistike a cinkelt kockát, feltéve, hogy mindkét dobása 6-os lett?

(b) Jelölje X Móricka első dobásának értékét és Y Pistike első dobásának értékét. Mennyi $\text{cov}(X, Y)$? (Tipp: használjunk teljes várható érték tételt.)

2.HF: (Beadási határidő: 2013.11.18.)

HF 2.1 Egy 1000-oldalas könyvben 1500 sajtóhuba van, véletlenszerűen elszórva.

(a) Körülbelül mennyi annak a valószínűsége, hogy a 13-adik oldalon legalább 2 sajtóhuba van?

(b) Körülbelül mennyi annak a valószínűsége, hogy a 13-adik oldalon legalább 2, a 42-ediken pedig pontosan 2 sajtóhuba van?

(c) *Bónusz kérdés:* A sajtóhubáknak kb. $\frac{1}{3}$-a vesszőhiba (abban az értelemben, hogy minden sajtóhuba $\frac{1}{3}$ valószínűséggel vesszőhiba, a többitől függetlenül). Mennyi annak a valószínűsége, hogy a 13-adik oldalon legalább 2 vesszőhiba és pontosan 1 egyéb sajtóhuba van?

HF 2.2 Egy vicc úgy terjed, hogy mindenki, aki meghallja, véletlen számú új embernek meséli el, éspedig 0, 1, 2 vagy 3 új embernek, rendre $p_0 = p$, $p_1 = \frac{1}{4}$, $p_2 = \frac{1}{4}$ és $p_3 = \frac{1}{2} - p$ valószínűséggel, *az előzményektől függetlenül.*

A viccet Móricka találja ki, ő alkotja egyedül a nulladik generációt. Első generációnak nevezzük azokat, akinek Móricka maga meséli el a viccet, második generációnak azokat, akiknek az első generáció tagjai mesélik el, stb.

Jelölje Z_k a k-adik generáció tagjainak a számát ($k = 0, 1, 2, \ldots$), N pedig a viccet megismerő emberek teljes számát (Mórickát is beleértve, vagyis $N = \sum_{k=0}^{\infty} Z_k$).

Válaszoljuk meg az alábbi kérdéseket

I. $p = \frac{1}{3}$ esetén,

II. $p = \frac{1}{6}$ esetén:

a.) Mi Z_2 generátorfüggvénye?

b.) Mennyi Z_{12} várható értéke?

c.) Mennyi a $\mathbb{P}(Z_3 = 0)$ valószínűség?

d.) Mennyi a valószínűsége annak, hogy a vicc terjedése előbb-utóbb megáll (vagyis hogy valamelyik generáció már üres)? *(Segítség: ha egy harmadfokú egyenletnek ismerjük egy gyökét, akkor a gyöktényezőt kiemelve a többi gyökre másodfokú egyenletet kapunk.)*

e.) Mennyi N várható értéke?

3.HF: (Beadási határidő: 2013.12.02.)

HF 3.1 Egy épülő szennyvíztisztító üzem kapacitása 320000 liter/nap. A szennyvíztisztító 1500 háztartást szolgál ki, melyeket a következő kategóriákba sorolnak:

* kicsi, amelynek átlagos napi szennyvíztermelése 100 liter, de semmiképpen nem több, mint 300 liter;
* közepes, amelynek átlagos napi szennyvíztermelése 200 liter, de semmiképpen nem több, mint 500 liter;
* nagy, amelynek átlagos napi szennyvíztermelése 300 liter, de semmiképpen nem több, mint 800 liter.

Az egyes kategóriákba tartozó háztartások száma rendre 400, 800 illetve 300. Az egyes háztartások napi szennyvíztermelése függetlennek tekinthető.

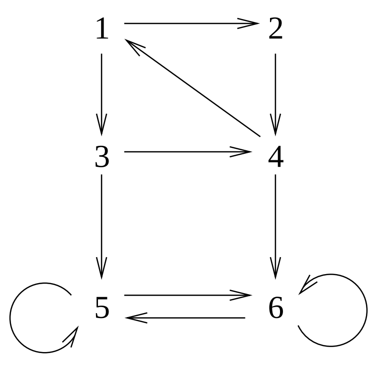
a.) Adjunk felső becslést annak a valószínűségére, hogy egy adott napon az üzem nem képes a termelt szennyvizet megtisztítani.

b.) Az üzemeltető elégedetlen az előző részben kijött eredménnyel. Adjunk felső becslést arra, hogy mekkorára növeljék az üzem kapacitását ahhoz, hogy a túllépés kockázata 10^{-8} alá csökkenjen.

4.HF: (Beadási határidő: 2013.12.09.)

HF 4.1 Az 1. ábrán látható gráf egy diszkrét idejű, időben homogén Markov lánc pozitív valószínűségű egylépéses átmeneteit mutatja. Osztályozzuk az állapotokat aszerint, hogy melyik melyikkel érintkezik! Minden osztályról állapítsuk megy, hogy

* zárt-e vagy nyílt,
* lényeges-e vagy lényegtelen,
* visszatérő-e vagy átmeneti,
* mennyi a periódusa.



1. ábra. Markov lánc gráf-reprezentációja (valószínűségek nélkül)

HF 4.2 Mari néni szeret beszélgetni, és befolyásolható. Minden este elmegy egy szomszédjához beszélgetni, és átveszi annak pártállását. Hat szomszédja van, ebből 2 fűpárti, 1 fapárti, 3 pedig virágpárti. Mari néni minden este vaktában választ beszélgetőpartnert azon 5 közül, akinél előző este *nem járt*. Jelöljük Mari néni lehetséges pártállásait $\{1, 2, 3\}$-mal, ahol „1" jelentése „fűpárti", „2" jelentése „fapárti", „3" jelentése „virágpárti". X_n pedig jelölje Mari néni pártállását n nap elteltével.

Modellezzük Mari néni állapotait időben homogén Markov láccal.

a.) Adjuk meg a Markov lánc átmenetmátriuxát.

b.) Ha tudjuk, hogy a 0-dik napon Mari néni fűpárti volt, mi a valószínűsége az 123123 állapot-sorozatnak (a nulladik napot is beleértve)?

c.) Ha tudjuk, hogy a 0-dik napon Mari néni fűpárti volt, mi a valószínűsége, hogy a 2-dik napon is az?

d.) Hosszú idő elteltével közelítőleg mekkora valószínűséggel lesz Mari néni éppen fapárti?

e.) Mari néni minden nap elmegy a gazdaboltba, és ha éppen fűpárti, akkor fűnyíródamilt vesz 500 Ft-ért, ha éppen fapárti, akkor permetszert 3000 Ft-ért, ha pedig virágpárti, akkor tápoldatot 1000 Ft-ért. Napi átlagban mennyit költ a gazdaboltban hosszú távon?

5.HF: (Beadási határidő: 2013.12.16.)

HF 5.1 Egy hálózati kiszolgálóhoz Poisson-folyamat szerint érkeznek a feladatok, másodpercenként átlagosan kettő, és beállnak a sorba. Az egyes igények kiszolgálása egymástól és a beérkezésektől is független, exponenciális eloszlású véletlen ideig tart, aminek várható értéke $\frac{1}{4}$ másodperc. Az egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy a sorban legfeljebb 5 feladat lehet (azzal együtt, amelyik éppen kiszolgálás alatt áll), ami ezen felül esetleg érkezik, az elvész. Jelölje X_t a t időben a sorban álló feladatok számát.

a.) Modellezzük a folyamatot folytonos idejű Markov lánccal! Adjuk meg az állapotteret, és rajzoljuk fel a gráf-reprezentációt (az egyes átmenetek rátáival).

b.) Adjuk meg a ráta-mátrixot, a tartózkodási idő paraméter vektort és a beágyazott diszkrét idejű Markov lánc átmenetmátrixát.

c.) Írjuk fel a folyamat infinitezimális generátorát.

d.) Kezdetben a sor üres. Közelítőleg mekkora valószínűséggel lesz a sorban 120 másodperc elteltével pontosan 2 feladat?

e.) Az idő mekkora hányadát tölti a kiszolgáló üresjáratban hosszú távon?

f.) A beérkező feladatok mekkora hányada vész el hosszú távon?

g.) *Bónusz kérdés:* Mi lehet a válasz ugyanezekre a kérdésekre, ha a sor hossza nincsen korlátozva? A stacionárius eloszlás megsejtéséhez szabad kihasználni (mint a véges esetben is), hogy X_t születési-halálozási folyamat.

6.HF: (Ezt nem kell beadni, csak úgy van.)

HF 6.1 Mintát vettünk egy (N, p) paraméterű binomiális eloszlásból, ahol $N = 10$ és p ismeretlen. Azt jött ki, hogy 7; 7; 4; 3; 5; 7; 7; 5; 3; 7; 2; 4; 5. Adjunk maximum likelyhood becslést a p értékére.

HF 6.2 Egy áruház tojás-osztályán a tojások tömege jó közelítéssel normális eloszlású valószínűségi változó, melynek várható értéke és szórása is ismeretlen. Egy doboznyi tojást egysével lemértünk, és a következő eredményeket kaptuk (grammban): 57,0; 57,5; 67,2; 61,5; 60,3; 61,8; 65,3; 57,0; 61,2; 61,2. Döntsünk 95%-os szinten arról a hipotézisről, hogy az eloszlás várható értéke legalább 63 gramm.