Felsőbb Matematika Informatikusoknak A,D és Villamosmérnököknek A,B
házi feladatok a „Sztochasztika 2” részhez
2014 ősz

Minden héten összesen egy pontot érnek a kitűzött feladatok.

1.HF: (Beadási határidő: 2014.11.10.)

HF 1.0 **(Nem beadandó:)** Számoljuk ki a λ paraméterű Poisson eloszlás generátorfüggvényét! *(Vigyázat: előadáson elírtam. Segítség: $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$.)*

HF 1.1 Az X nemnegatív egész értékű valószínűségi változó generátorfüggvénye

$$g(z) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}z + \frac{3}{8}z^2 + cz^3, \quad \text{ahol } c \in \mathbb{R}.$$

(a) Mennyi c értéke?
(b) Mennyi X várható értéke?
(c) Mennyi X szórása?
(d) Mennyi a $\mathbb{P}(X = 2)$ valószínűség?

HF 1.2 Egy szabályos dobókockával dobunk, majd ami szám kijött, annyiszor dobunk egy szabályos érmével. Jelölje Y az érmével dobott fejek számát.

(a) Számoljuk ki Y generátorfüggvényét. *(Tipp: Y egy véletlen tagszámú összeg.)*
(b) Mennyi Y várható értéke?

2.HF: (Beadási határidő: 2014.11.17.)

HF 2.1 Egy boltban minden vevő kiszolgálása pontosan egy percig tart. Ez alatt véletlen számú újabb vevő érkezik, és beállnak a sorba. Az egyes vevők kiszolgálása alatt érkező új vevők száma független és azonos, $\lambda = \frac{3}{4}$ paraméterű Poisson eloszlású.

A legelső vevő Pistike, nevezzük őt egymagát a vevők „nulladik generáció”-jának. Az ő kiszolgálása alatt érkező vevők legyenek az „első generáció”. Az első generáció tagjainak kiszolgálása alatt érkezők alkossák a vevők „második generáció”-ját, stb. Az n-edik generációba tartozó vevők számát jelöljük Z_n-nel ($n = 0, 1, 2 \ldots$).

(a) Vegyük észre, hogy Z_n Galton-Watson elágazó folyamat. Mi az egylépéses utódszámeloszlás generátorfüggvénye és várható értéke?
(b) Mennyi Z_{10} várható értéke?
(c) Mi Z_3 generátorfüggvénye?
(d) Számoljuk ki a $\mathbb{P}(Z_2 = 0)$, $\mathbb{P}(Z_3 = 0)$ és $\mathbb{P}(Z_4 = 0)$ valószínűségeket.
(e) A boltos akkor tarthat pihenőt, ha egyszer csak üres lesz a sor. Vegyük észre, hogy ez pontosan akkor következik be, ha valamelyik generáció már üres – vagyis az elágazó folyamat kihal. Mi annak a valószínűsége, hogy ez előbb-utóbb bekövetkezik?
(f) Mennyi a boltos első pihenőjéig kiszolgált összes vevő számának várható értéke?
(g) **Bónusz feladat:** Mi a válasz a e kérdésre, ha a fenti $\lambda = \frac{3}{4}$ helyett $\lambda = 2$?

HF 2.2 Egy vizsgán 400 hallgató vesz részt, és mindegyikük a többitől függetlenül $p = \frac{3}{4}$ valószínűséggel vizsgázik sikeresen. Adjunk nagy eltérés becslést annak valószínűségére, hogy a résztvevők legalább fele megbukik.

Tipp: a bukottak számát írjuk fel mint független, azonos eloszlású (indikátor) valószínűségi változók összegét.

Tipp: mind a Hoeffding egyenlőtlenség, mind a Cramér tétel használható.

Vigyázat: a centrális határeloszlás tétellel történő közelítés viszont ***nem*** *nagy eltérés becslés.*

Segítség: a p paraméterű Bernoulli eloszlás Cramér féle rátafüggvénye

$$I(x) = x \ln\left(\frac{x}{1-x}\frac{1-p}{p}\right) + \ln\left(\frac{1-x}{1-p}\right) \qquad \textit{(ha } 0 < x < 1\textit{).}$$

3.HF: (Beadási határidő: 2014.11.24.)

HF 3.1 Egy jegypénztárhoz pontosan percenként érkeznek a vevők: minden perc végén pontosan 1. Ez alatt az egy perc alatt a pénztáros véletlen számú vevőt szolgál ki: $\frac{1}{2}$ valószínűséggel 2-t, $\frac{1}{4}$ valószínűséggel 1-et, és $\frac{1}{4}$ valószínűséggel 1-et sem, az előzményektől függetlenül. Kivétel ez alól:

* Ha a perc elején csak 1 vevő áll a sorban, mert akkor őt $\frac{3}{4}$ valószínűséggel sikerül kiszolgálni, $\frac{1}{4}$ valószínűséggel pedig nem.
* Ha a perc végén már 4 vevő áll sorban, akkor az újonnan érkező nem áll be a sorba, hanem elkullog.

Jelölje X_n a sorban állók számát az n-edik perc végén (pontosabban: az $n+1$-edik perc elején, közvetlen azután, hogy az új vevő megérkezett). Tegyük fel, hogy az első perc elején a sorban pontosan 1 ember áll, vagyis $X_0 = 1$.

a.) Adjuk meg az X_n Markov lánc állapotterét. *(Vigyázat, érdemes észnél lenni: mik is a* ***lehetséges, elérhető*** *állapotok?)*

b.) Adjuk meg a Markov lánc gráf-reprezentációját!

c.) Adjuk meg a Markov lánc átmenetmátrixát!

d.) Adjuk meg a Markov lánc kezdeti eloszlását, vagyis a $\pi(0)$ kezdeti eloszlás vektort!

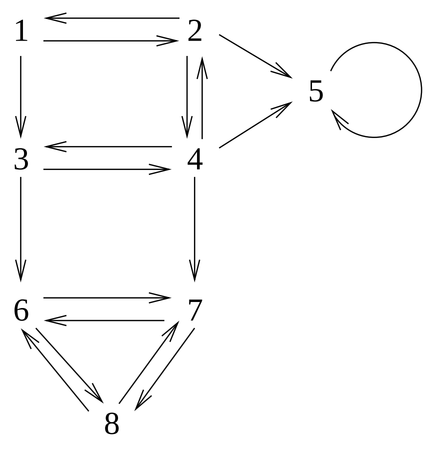
e.) Mi a valószínűsége, hogy az $X_0X_1X_2\dots$ sorozat (a trajektória) eleje 1211223?

f.) Mennyi a $\mathbb{P}(X_3) = 2$ valószínűség?

g.) Számoljuk ki X_2 eloszlását, vagyis a Markov lánc 2 időegység utáni $\pi(2)$ eloszlásvektorát !

h.) Mennyi $n = 29$-re a $\mathbb{P}(X_n = 3)$ valószínűség? *Csak képletet kérek!* ***Bónusz:*** *Számoljuk ki a $\mathbb{P}(X_n = 3)$ valószínűséget $n = 10, 20, 30$-ra valamilyen számítógépes programmal, ami gyorsan tud mátrixokat szorozni.*

4.HF: (Beadási határidő: 2014.12.05.)



1. ábra. Markov lánc gráf-reprezentációja (valószínűségek nélkül)

HF 4.1 Az 1. ábrán látható gráf egy diszkrét idejű, időben homogén Markov lánc pozitív valószínűségű egylépéses átmeneteit mutatja. Osztályozzuk az állapotokat aszerint, hogy melyik melyikkel érintkezik! Minden osztályról állapítsuk megy, hogy

* zárt-e vagy nyílt,
* lényeges-e vagy lényegtelen,
* visszatérő-e vagy átmeneti,
* mennyi a periódusa.

HF 4.2 Legyen X_n diszkrét idejű, időben homogén Markov lánc az $S = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ állapottéren, ami egy sor hosszát modellezi. Az átmenetvalószínűségek legyenek olyanok, hogy ugrani 1 lépésben csak szomszédos állapotba lehet: a sor hossza $\frac{3}{4}$ valószínűséggel 1-gyel csökken, $\frac{1}{4}$ valószínűséggel pedig 1-gyel nő. Kivétel ez alól, ha a sor üres, mert akkor a hossza csökkenés helyett $\frac{3}{4}$ valószínűséggel 0 marad, illetve ha a sor hossza 7, mert akkor növekedés helyett $\frac{1}{4}$ valószínűséggel 7 marad.

a.) Keressük meg a Markov lánc stacionárius eloszlását. Ehhez használjuk ki, hogy X_n születési-halálozási folyamat.

b.) Kezdetben a sor üres. Körülbelül mekkora a valószínűsége, hogy 1000 lépés után ismét üres?

c.) Mennyi lesz hosszú távon az átlagos sorhossz?

d.) **Bónusz kérdés:** Mi a válasz a fenti kérdésekre, ha a sorhosszra nincs felső korlát, vagyis az állapottér $\{0, 1, 2, \dots\}$?

5.HF: (Beadási határidő: 2014.12.12.)

HF 5.1 Egy bonyolult engedélyezési ügy aktáját három hivatal tologatja egymás között. A Természetvédelmi Hivatal átlagosan 3 hónapot ül rajta, majd továbbküldi a Műszaki Hivatalnak. A Műszaki Hivatal átlagosan 2 hónap után továbbküldi a Gazdasági Hivatalnak. A Gazdasági Hivatal átlagosan 1 hónapot dolgozik vele, majd kockadobással dönt, éspedig $\frac{2}{3}$ valószínűséggel a Természetvédelmi, $\frac{1}{3}$ valószínűséggel padig a Műszaki Hivatalnak küldi.

Modellezzük a rendszert folytonos idejű Markov lánccal. Az időt mérjük években. Az ügy a $t = 0$ időpontban a Gazdasági Hivatalból indul.

a.) Adjuk meg a tartózkodási idő paraméter vektort és a beépített diszkrét idejű Markov lánc átmenetmátrixát.

b.) Adjuk meg az egyes átmenetekhez tartozó ugrási rátákat.

c.) Rajzoljuk fel a folytonos idejű Markov lánc gráf-reprezentációját.

d.) Írjuk fel az infinitezimális generátort és a kezdeti eloszlás vektort.

e.) Keressük meg a Markov lánc stacionárius eloszlását.

f.) Közelítőleg mennyi a valószínűsége, hogy 7 nap elteltével az akta a Gazdasági Hivatalnál lesz?

g.) Közelítőleg mennyi a valószínűsége, hogy 7 nap elteltével az akta a Műszaki Hivatalnál lesz?

h.) Közelítőleg mennyi a valószínűsége, hogy 15 év elteltével az akta a Természetvédelmi Hivatalnál lesz?

i.) Az ügyön az ügyintézők a Természetvédelmi Hivatalban napi 3 órát dolgoznak, a Műszaki Hivatalban napi 2-t, a Gazdaságiban pedig napi 1-et (már amikor éppen náluk van az akta). Mennyi az ügybe fektetett átlagos napi munkaidő hosszú távon?