Felsőbb Matematika Informatikusoknak A,D és Villamosmérnököknek A,B
házi feladatok a „Sztochasztika 2" részhez
2014 ősz

Minden héten összesen egy pontot érnek a kitűzött feladatok.

1.HF: (Beadási határidő: 2014.11.10.)

HF 1.0 **(Nem beadandó:)** Számoljuk ki a λ paraméterű Poisson eloszlás generátorfüggvényét! *(Vigyázat: előadáson elírtam. Segítség:* $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$.*)*

Megoldás:

$$g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(Poi(\lambda) = k) z^k = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} z^k = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda z)^k}{k!} = e^{-\lambda} e^{\lambda z} = e^{\lambda(z-1)}.$$

HF 1.1 Az X nemnegatív egész értékű valószínűségi változó generátorfüggvénye

$$g(z) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} z + \frac{3}{8} z^2 + c z^3, \quad \text{ahol } c \in \mathbb{R}.$$

(a) Mennyi c értéke?
(b) Mennyi X várható értéke?
(c) Mennyi X szórása?
(d) Mennyi a $\mathbb{P}(X = 2)$ valószínűség?

Megoldás:

(a) Minden genarátorfüggvényre igaz, hogy $g(1) = 1$, ezért

$$g(1) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \cdot 1 + \frac{3}{8} \cdot 1^2 + c \cdot 1^3 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{3}{8} + c = 1,$$

amiből $c = \frac{1}{8}$. Ebből

$$g(z) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} z + \frac{3}{8} z^2 + \frac{1}{8} z^3$$

(b) Mint mindig, $\mathbb{E}X = g'(1)$. Ehhez

$$g'(z) = \frac{1}{4} + \frac{3}{8} \cdot 2z + \frac{1}{8} \cdot 3z^2,$$

amiből

$$\mathbb{E}X = g'(1) = \frac{1}{4} + \frac{3}{8} \cdot 2 + \frac{1}{8} \cdot 3 = \frac{11}{8} = 1.375.$$

(c) Mint mindig, $\mathbf{D}^2 X = g''(1) + g'(1) - g'(1)^2$. Ehhez

$$g''(z) = \frac{3}{4} + \frac{3}{4} z,$$

amiből $g'(1) = \frac{3}{4} + \frac{3}{4} \cdot 1 = \frac{3}{2}$, amiből

$$\mathbf{D}^2 X = \frac{3}{2} + \frac{11}{8} - \left(\frac{11}{8}\right)^2 = \frac{96 + 88 - 121}{64} = \frac{63}{64}.$$

Ebből

$$\mathbf{D}X = \frac{\sqrt{63}}{8} \approx 0.99$$

(d) Mint mindig, $\mathbb{P}(X=2)=\frac{g''(0)}{2!}$. Esetünkben $g''(0)=\frac{3}{4}$, amiből

$$\mathbb{P}(X=2)=\frac{\frac{3}{4}}{2!}=\frac{3}{8}.$$

Alternatív megoldás: A generátorfüggvényből kiolvasható X eloszlása: $p_k := \mathbb{P}(X=k)$ jelöléssel

$$g(z)=\sum_{k=0}^{\infty} p_k z^k=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}z+\frac{3}{8}z^2+cz^3,$$

amiből $p_0=\frac{1}{4}$, $p_1=\frac{1}{4}$, $p_2=\frac{3}{8}$, $p_3=c$, és a többi k-ra $p_k=0$. Így persze

(a) $\sum_{k=0}^{\infty} p_k=1$ miatt $c=\frac{1}{8}$.

(b) $\mathbb{E}X=\sum_{k=0}^{\infty} kp_k=0\cdot\frac{1}{4}+1\cdot\frac{1}{4}+2\cdot\frac{3}{8}+3\cdot\frac{1}{8}=\frac{11}{8}$.

(c) $\mathbb{E}(X^2)=\sum_{k=0}^{\infty} k^2p_k=0^2\cdot\frac{1}{4}+1^2\cdot\frac{1}{4}+2^2\cdot\frac{3}{8}+3^2\cdot\frac{1}{8}=\frac{23}{8}$. Emiatt

$$\mathbf{D}^2X=\mathbb{E}(X^2)-(\mathbb{E}X)^2=\frac{23}{8}-\left(\frac{11}{8}\right)^2=\frac{63}{64},$$

amiből

$$\mathbf{D}X=\frac{\sqrt{63}}{8}\approx 0.99$$

(d) $\mathbb{P}(X=2)=p_2=\frac{3}{8}$.

HF 1.2 Egy szabályos dobókockával dobunk, majd ami szám kijött, annyiszor dobunk egy szabályos érmével. Jelölje Y az érmével dobott fejek számát.

(a) Számoljuk ki Y generátorfüggvényét. *(Tipp: Y egy véletlen tagszámú összeg.)*

(b) Mennyi Y várható értéke?

Megoldás: (2.0. változat – néhány sajtóhiba javítva, köszönet Botos Csongornak.)

(a) Jelölje N a kockával dobott számot, X_k pedig az k-adik érmedobás során a „fej” indikátorát, vagyis

$$X_k=\begin{cases}1, & \text{ha a } k\text{-adik dobás fej,}\\ 0, & \text{ha nem}\end{cases}.$$

Így $Y=\sum_{k=1}^{N} X_k$ véletlen tagszámú összeg, és generátorfüggvénye

$$g_Y(z)=g_N(g_X(z)),$$

ahol

$$g_N(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\mathbb{P}(N=k)z^k=\frac{1}{6}z^1+\frac{1}{6}z^2+\cdots+\frac{1}{6}z^6=\frac{z+z^2+z^3+z^4+z^5+z^6}{6}$$

az N generátorfüggvénye és

$$g_X(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\mathbb{P}(X=k)z^k=\frac{1}{2}z^0+\frac{1}{2}z^1=\frac{1+z}{2}$$

az X_k-k közös generátorfüggvénye. Összesítve:

$$g_Y(z)=\frac{\frac{1+z}{2}+\left(\frac{1+z}{2}\right)^2+\left(\frac{1+z}{2}\right)^3+\left(\frac{1+z}{2}\right)^4+\left(\frac{1+z}{2}\right)^5+\left(\frac{1+z}{2}\right)^6}{6}.$$

(b) Mivel $Y = \sum_{k=1}^{N} X_k$ véletlen tagszámú összeg,

$$\mathbb{E}Y = \mathbb{E}N\mathbb{E}X = \frac{1+2+3+4+5+6}{6} \cdot \frac{0+1}{2} = \frac{7}{4}.$$

Ugyanez, persze, kiszámolható sokkal több munkával is mint $\mathbb{E}Y = g_Y'(1)$.

2.HF: (Beadási határidő: 2014.11.17.)

HF 2.1 Egy boltban minden vevő kiszolgálása pontosan egy percig tart. Ez alatt véletlen számú újabb vevő érkezik, és beállnak a sorba. Az egyes vevők kiszolgálása alatt érkező új vevők száma független és azonos, $\lambda = \frac{3}{4}$ paraméterű Poisson eloszlású.

A legelső vevő Pistike, nevezzük őt egymagát a vevők „nulladik generáció”-jának. Az ő kiszolgálása alatt érkező vevők legyenek az „első generáció”. Az első generáció tagjainak kiszolgálása alatt érkezők alkossák a vevők „második generáció”-ját, stb. Az n-edik generációba tartozó vevők számát jelöljük Z_n-nel ($n = 0, 1, 2 \ldots$).

(a) Vegyük észre, hogy Z_n Galton-Watson elágazó folyamat. Mi az egylépéses utódszámeloszlás generátorfüggvénye és várható értéke?

(b) Mennyi Z_{10} várható értéke?

(c) Mi Z_3 generátorfüggvénye?

(d) Számoljuk ki a $\mathbb{P}(Z_2 = 0)$, $\mathbb{P}(Z_3 = 0)$ és $\mathbb{P}(Z_4 = 0)$ valószínűségeket.

(e) A boltos akkor tarthat pihenőt, ha egyszer csak üres lesz a sor. Vegyük észre, hogy ez pontosan akkor következik be, ha valamelyik generáció már üres – vagyis az elágazó folyamat kihal. Mi annak a valószínűsége, hogy ez előbb-utóbb bekövetkezik?

(f) Mennyi a boltos első pihenőjéig kiszolgált összes vevő számának várható értéke?

(g) **Bónusz feladat:** Mi a válasz a e kérdésre, ha a fenti $\lambda = \frac{3}{4}$ helyett $\lambda = 2$?

Megoldás:

a.) Valóban, minden vevő véletlen számú „utódot” hoz létre, a többitől függetlenül és velük azonos eloszlással, így az egyes generációk elemszáma Galton-Watson elágazó folyamat. Az egylépéses utódszám-eloszlás éppen a Pistike kiszolgálása alatt érkezők számának eloszlása, vagyis $\lambda = \frac{3}{4}$ paraméterű Poisson eloszlás. Ennek generátorfüggvénye az 1.0 feladat szerint $g(z) = e^{\lambda(z-1)} = e^{\frac{3}{4}(z-1)}$, várható értéke pedig $m = \lambda = \frac{3}{4}$.

b.) $\mathbb{E}Z_{10} = m^{10} = \left(\frac{3}{4}\right)^{10} \approx 0,056$.

c.) Z_3 generátorfüggvénye

$$g_3(z) = g(g(g(z))) = exp\left(\frac{3}{4}\left(exp\left(\frac{3}{4}\left(exp\left(\frac{3}{4}(z-1)\right)-1\right)\right)-1\right)\right).$$

d.) A szokásos $r_n = \mathbb{P}(Z_n = 0)$ jelöléssel $r_0 = 0$ és $r_{n+1} = g(r_n)$, vagyis

* $r_0 = 0$
* $r_1 = g(r_0) = g(0) = e^{\frac{3}{4}(0-1)} \approx 0,4724$
* $r_2 = g(r_1) \approx g(0,4724) = e^{\frac{3}{4}(0,4724-1)} \approx 0,6732$
* $r_3 = g(r_2) \approx g(0,6732) = e^{\frac{3}{4}(0,6732-1)} \approx 0,7826$
* $r_4 = g(r_3) \approx g(0,7826) = e^{\frac{3}{4}(0,7826-1)} \approx 0,8496.$

e.) Valóban, pontosan akkor van az első pihenőig véges sok vevő, ha a nemüres generációk száma véges. (Ugyanis az egyes generációk elemszáma külön-külön mindenképpen véges.) A kihalás valószínűsége viszont könnyű: mivel $m = \frac{3}{4} < 1$, a folyamat *szubkritikus*, így $\mathbb{P}(\text{pihenő}) = \mathbb{P}(\text{kihalás}) = 1$.

f.) Mivel $m < 1$, a folyamat össz-elemszámának várható értéke a szokásos jelöléssel $\mathbb{E}N = \frac{1}{1-m} = \frac{1}{1-\frac{3}{4}} = 4$.

g.) **Bónusz feladat:** Ha $\lambda = 2$, akkor $m = \lambda = 2 > 1$, a folyamat *szuperkritikus*, és a kihalás valószínűsége nehezebb: a $g(z) = z$ egyetlen $[0, 1)$-beli megoldása. Vagyis meg kell oldani a $g(z) = z$ egyenletet. Esetünkben $g(z) = e^{\lambda(z-1)} = e^{2(z-1)}$, így a megoldandó egyenlet

$$e^{2(z-1)} = z.$$

Ezt algebrai úton megoldani nem lehet, de numerikusan elég könnyű. Mivel a g függvény fixpontját keressük, és tudjuk, hogy $r_0 = 0$-ból indítva az $r_n := g(r_{n-1})$ sorozat tart ehhez a fixponthoz, az egyik legegyszerűbb megoldás egy táblázatkezelő programmal kiszámolni az r_n sorozat első néhány (mondjuk 50) elemét: egy cellába beírjuk hogy 0, majd az alatta levő cellában kiszámoljuk a g(felette levő) értéket, és a cella tartalmát átmásoljuk az alatta levő 48 cellába. A kapott sorozat 0; $0,13533528323661$; $0,17740333081914$; $0,19297524966823$; $0,19907980576336$; $0,20152529167524$; $0,20251336053740$; $0,20291395050895$; $0,20307658623782$; $0,20314265199913$; $0,20316949532043$; $0,20318040310131$; $0,20318483564429$; $0,20318663690331$; $0,20318736888815$; $0,20318766634852$; $0,20318778722911$; $0,20318783635204$; $0,20318785631440$; $0,20318786442662$; $0,20318786772323$; $0,20318786906289$; $0,20318786960730$; $0,20318786982853$; $0,20318786991843$; $0,20318786995497$; $0,20318786996982$; $0,20318786997585$; $0,20318786997830$; $0,20318786997930$; $0,20318786997970$; $0,20318786997987$; $0,20318786997993$; $0,20318786997996$; $0,20318786997997$; $0,20318786997998$; $0,20318786997998$; $0,20318786997998$; $0,20318786997998$; $0,20318786997998$; $0,20318786997998$; $0,20318786997998$; $0,20318786997998$; $0,20318786997998$; $0,20318786997998$; $0,20318786997998$; $0,20318786997998$.
A kihalás valószínűsége jól látszik: $r_\infty \approx 0,20318786997998$.

HF 2.2 Egy vizsgán 400 hallgató vesz részt, és mindegyikük a többitől függetlenül $p = \frac{3}{4}$ valószínűséggel vizsgázik sikeresen. Adjunk nagy eltérés becslést annak valószínűségére, hogy a résztvevők legalább fele megbukik.

Tipp: a bukottak számát írjuk fel mint független, azonos eloszlású (indikátor) valószínűségi változók összegét.

Tipp: mind a Hoeffding egyenlőtlenség, mind a Cramér tétel használható.

Vigyázat: a centrális határeloszlás tétellel történő közelítés viszont ***nem*** *nagy eltérés becslés.*

Segítség: a p paraméterű Bernoulli eloszlás Cramér féle rátafüggvénye

$$I(x) = x \ln\left(\frac{x}{1-x}\frac{1-p}{p}\right) + \ln\left(\frac{1-x}{1-p}\right) \quad (\textit{ha } 0 < x < 1).$$

Megoldás: Legyen $n = 400$ és $i = 1, 2, \ldots, n$-re

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{ha az } i\text{-edik hallgató átmegy,} \\ 0, & \text{ha megbukik.} \end{cases}$$

így $S_n := x_1 + X_2 + \ldots X_n$ a sikeresen vizsgázók száma, a kérdés pedig a $\mathbb{P}(S_n \leq \frac{n}{2})$ valószínűség. Az X_i valószínűségi változók függetlenek és azonos, $p = \frac{3}{4}$ paraméterű Bernoulli eloszlásúak.

a.) A $\mathbb{P}(S_n \leq \frac{n}{2})$ valószínűség becsléséhez használhatjuk a Hoeffding egyenlőtlenséget, mivel az X_i-k korlátosak: $a_i \leq X_i \leq b_i$ ahol $a_i = 0$ és $b_i = 1$ minden i-re, amiből

$\sum_{i=1}^{n}(b_i - a_i)^2) = \sum_{i=1}^{n}(1-0)^2) = n \cdot 1^2 = n = 400$. Ezen felül $\mathbb{E}S_n = n\mathbb{E}X_i = np = 300$ és $\frac{n}{2} = 200$, így $t = 100$ választással a Hoeffding egyenlőtlenség miatt

$$\mathbb{P}(S_n \leq \frac{n}{2}) = \mathbb{P}(S_n \leq \mathbb{E}S_n - t) \leq \exp\left(-\frac{2t^2}{\sum_{i=1}^{n}(b_i - a_i)^2)}\right) = \exp\left(-\frac{2 \cdot 100^2}{400}\right) = e^{-50}$$

vagyis

$$\mathbb{P}(S_n \leq \frac{n}{2}) \leq e^{-50} \approx 1,93 \cdot 10^{-22}.$$

b.) A $\mathbb{P}(S_n \leq \frac{n}{2})$ valószínűség becsléséhez a Cramér tétel is használható, mivel az X_i-k azonos eloszlásúak és az eloszlásuk pontosan ismert. Ráadásul meg van adva a Cramér féle rátafüggvényük, így még számolni se kell sokat. A kérdéses valószínűséget $\mathbb{P}(S_n \leq \frac{n}{2}) = \mathbb{P}\left(\frac{S_n}{n} \in \left[0, \frac{1}{2}\right]\right) = \mathbb{P}\left(\frac{S_n}{n} \in [a,b]\right)$ alakba írjuk $a = 0$, $b = \frac{1}{2}$ választással. Mivel $m = \mathbb{E}X_i = p = \frac{3}{4}$-del $b < m$, a Cramér tétel szerint

$$\mathbb{P}\left(\frac{S_n}{n} \in [a,b]\right) \lessapprox e^{-nI(b)} = e^{-nI\left(\frac{1}{2}\right)},$$

ahol I a $p = \frac{3}{4}$ paraméterű Bernoulli eloszlásnak a feladatban megadott Cramér féle rátafüggvénye. Ezért

$$I\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1-p}{p}\right) + \ln\left(\frac{1}{2(1-p)}\right) = \cdots = -\ln\sqrt{4p(1-p)},$$

amiből

$$e^{-nI\left(\frac{1}{2}\right)} = (4p(1-p))^{n/2}.$$

Esetünkben $n = 400$ és $p = \frac{3}{4}$, így

$$\mathbb{P}\left(\frac{S_n}{n} \leq \frac{1}{2}\right) \lessapprox \left(4 \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4}\right)^{\frac{400}{2}} = \left(\frac{3}{4}\right)^{200} \approx 1,03 \cdot 10^{-25}.$$

Látható, hogy ebben az esetben a Cramér tétel 1000-szer jobb becslést ad, mint a Hoeffding egyenlőtlenség.

3.HF: (Beadási határidő: 2014.11.24.)

HF 3.1 Egy jegypénztárhoz pontosan percenként érkeznek a vevők: minden perc végén pontosan 1. Ez alatt az egy perc alatt a pénztáros véletlen számú vevőt szolgál ki: $\frac{1}{2}$ valószínűséggel 2-t, $\frac{1}{4}$ valószínűséggel 1-et, és $\frac{1}{4}$ valószínűséggel 1-et sem, az előzményektől függetlenül. Kivétel ez alól:

* Ha a perc elején csak 1 vevő áll a sorban, mert akkor őt $\frac{3}{4}$ valószínűséggel sikerül kiszolgálni, $\frac{1}{4}$ valószínűséggel pedig nem.
* Ha a perc végén már 4 vevő áll sorban, akkor az újonnan érkező nem áll be a sorba, hanem elkullog.

Jelölje X_n a sorban állók számát az n-edik perc végén (pontosabban: az $n+1$-edik perc elején, közvetlen azután, hogy az új vevő megérkezett). Tegyük fel, hogy az első perc elején a sorban pontosan 1 ember áll, vagyis $X_0 = 1$.

a.) Adjuk meg az X_n Markov lánc állapotterét. *(Vigyázat, érdemes észnél lenni: mik is a **lehetséges, elérhető** állapotok?)*

b.) Adjuk meg a Markov lánc gráf-reprezentációját!

c.) Adjuk meg a Markov lánc átmenetmátrixát!

d.) Adjuk meg a Markov lánc kezdeti eloszlását, vagyis a $\pi(0)$ kezdeti eloszlás vektort!

e.) Mi a valószínűsége, hogy az $X_0X_1X_2\dots$ sorozat (a trajektória) eleje 1211223?

f.) Mennyi a $\mathbb{P}(X_3) = 2$ valószínűség?

g.) Számoljuk ki X_2 eloszlását, vagyis a Markov lánc 2 időegység utáni $\pi(2)$ eloszlásvektorát !

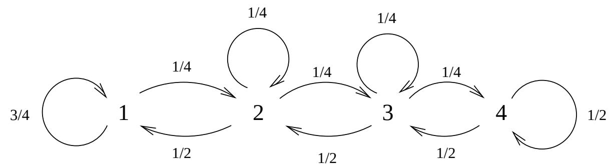
h.) Mennyi $n = 29$-re a $\mathbb{P}(X_n = 3)$ valószínűség? *Csak képletet kérek!* ***Bónusz:*** *Számoljuk ki a $\mathbb{P}(X_n = 3)$ valószínűséget $n = 10, 20, 30$-ra valamilyen számítógépes programmal, ami gyorsan tud mátrixokat szorozni.*

Megoldás:

a.) Mivel a vevőket mindig közvetlenül azután számoljuk, hogy a soron következő megérkezett, X_n mindig legalább 1 lesz. Másfelől, ha már a 4-et elérte, akkor tovább nem nőhet, vagyis 5-nél mindig kisebb marad. Így az állapottér

$$S = \{1, 2, 3, 4\}.$$

b.) Mivel mindig 1 vevő érkezik, a Markov lánc mindig eggyel kevesebbet ugrik lefelé, mint ahány vevőt sikerült kiszolgálni. Vagyis $\frac{1}{2}$ valószínűséggel 1-et ugrik lefelé, $\frac{1}{4}$ valószínűséggel nem ugrik sehová, és $\frac{1}{4}$ valószínűséggel 1-et felfelé. Kivétel ez alól a két végső helyzet: 1-ből $\frac{1}{4}$ valószínűséggel ugrik 1-et felfelé és $\frac{3}{4}$ valószínűséggel marad; 4-ből $\frac{1}{2}$ valószínűséggel ugrik 1-et lefelé és $\frac{1}{2}$ valószínűséggel marad. Így a gráf-reprezentáció



c.)

$$P = \begin{pmatrix} 3/4 & 1/4 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/4 & 1/4 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

d.) A feladat szövege szerint $X_0 = 1$, vagyis $\pi_1(0) = \mathbb{P}(X_0 = 1) = 1$, a többi i-re $\pi_i(0) = 0$. Vagyis a kezdeti eloszlás vektor $\pi(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Ez *sorvektor.*

e.) $\mathbb{P}((X_0X_1\dots X_6) = (1211223)) = \pi_1(0)P_{12}P_{21}P_{11}P_{12}P_{22}P_{23} = 1 \cdot \frac{1}{4}\frac{1}{2}\frac{3}{4}\frac{1}{4}\frac{1}{4}\frac{1}{4} = \frac{3}{2048}$.

f.) Bocs, sajtóhiba. A helyes kérdés persze $\mathbb{P}(X_3 = 2) =?$. A válasz pedig: mivel $X_0 = 1$, $\mathbb{P}(X_3 = 2) = \mathbb{P}(X_3 = 2|X_0 = 1)$. Ezt kétféleképpen is ki lehet számolni:

i.) 1-ből 2-be 3 lépésben el lehet jutni az 1112, 1122, 1212, 1222, 1232 útvonalakon. Ezek val.ségeit az előző pont mintájára kiszámoljuk és összeadjuk. Nem csinálom meg.

ii.) $\mathbb{P}(X_3 = 2|X_0 = 1) = P^3_{12}$, vagyis a P^3 3-lépéses átmenetmátrix első sorának második eleme. A mátrix-szorzást elvégezve

$$P^3 = \left[\begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\right] \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{11}{16} & \frac{4}{16} & \frac{1}{16} & 0 \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \end{pmatrix} \begin{pmatrix} * & \frac{1}{4} & * & * \\ * & \frac{1}{4} & * & * \\ * & \frac{1}{2} & * & * \\ * & 0 & * & * \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * & \frac{17}{64} & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \end{pmatrix},$$

ahol a $*$-gal jelölt elemek számunkra nem érdekesek, így ki se számoltam őket. Lényeg, hogy $P^3_{12} = \frac{17}{64} = 0.265625$

g.)

$$\pi(2) = \pi(0)P^2 = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{3}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0\\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4}\\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{3}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0\\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4}\\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix}\frac{3}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{3}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0\\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4}\\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{11}{16} & \frac{4}{16} & \frac{1}{16} & 0\end{pmatrix}.$$

h.) $\mathbb{P}(X_{29} = 3) = \pi_3(29)$, vagyis a $\pi(29)$ vektor harmadik eleme. Ezt elegánsan úgy lehet leírni, hogy

$$\mathbb{P}(X_{29} = 3) = \pi_3(29) = \pi(29)\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}.$$

Mivel $\pi(29) = \pi(0)P^{29} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix} P^{29}$,

$$\mathbb{P}(X_{29} = 3) = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix} P^{29}\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}.$$

Bónusz:

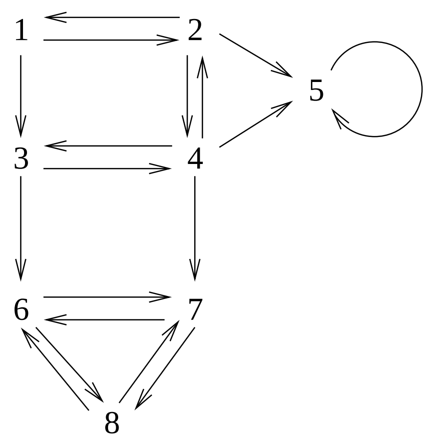
$$a_n := \mathbb{P}(X_n = 3) = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix} P^{n}\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}$$

„GNU Octave"-val számolva:

n	10	20	30
a_n	0.12629	0.13294	0.13331

Megjegyzem, hogy $n \to \infty$-re a határérték $\pi_3(\infty) = \frac{2}{15} \approx 0.1333333$.

4.HF: (Beadási határidő: 2014.12.05.)



1. ábra. Markov lánc gráf-reprezentációja (valószínűségek nélkül)

HF 4.1 Az 1. ábrán látható gráf egy diszkrét idejű, időben homogén Markov lánc pozitív valószínűségű egylépéses átmeneteit mutatja. Osztályozzuk az állapotokat aszerint, hogy melyik melyikkel érintkezik! Minden osztályról állapítsuk megy, hogy

* zárt-e vagy nyílt,
* lényeges-e vagy lényegtelen,
* visszatérő-e vagy átmeneti,
* mennyi a periódusa.

Megoldás: Két állapot pontosan akkor van azonos osztályban, ha egyikből a másikba és másikból az egyikbe is el lehet jutni (esetleg több lépésben). Egy osztály akkor zárt, ha nem lehet belőle kijutni – egyébként nyílt. Mivel az állapottér véges, minden osztály is véges, ezért minden osztály pontosan akkor lényeges és pontosan akkor visszatérő, ha zárt, egyébként pedig lényegtelen és átmeneti. (Végtelen állapotterek végtelen osztályaira ezek a fogalmak sokkal izgalmasabbak.)

Egy állapot periódusa az a legnagyobb szám, aminek minden lehetséges visszatérési idő többszöröse. Egy osztály periódusa az ő elemeinek közös periódusa.

Mindezek alapján

* Az {1,2,3,4} osztály nyílt, lényegtelen, átmeneti, periódusa 2.
* Az {5} osztály zárt, lényeges, visszatérő, periódusa 1 (vagyis ő aperiodikus).
* A {6,7,8} osztály zárt, lényeges, visszatérő. Periódusa 1 (vagyis ő aperiodikus), hiszen 2 és 3 lépésben is vissza lehet térni ugyanabba az állapotba. **A periódust a megoldás első verziójában hibásan adtam meg. Köszönet az észrevételért Sukta Beátának.**

HF 4.2 Legyen X_n diszkrét idejű, időben homogén Markov lánc az $S = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ állapottéren, ami egy sor hosszát modellezi. Az átmenetvalószínűségek legyenek olyanok, hogy ugrani 1 lépésben csak szomszédos állapotba lehet: a sor hossza $\frac{3}{4}$ valószínűséggel 1-gyel csökken, $\frac{1}{4}$ valószínűséggel pedig 1-gyel nő. Kivétel ez alól, ha a sor üres, mert akkor a hossza csökkenés helyett $\frac{3}{4}$ valószínűséggel 0 marad, illetve ha a sor hossza 7, mert akkor növekedés helyett $\frac{1}{4}$ valószínűséggel 7 marad.

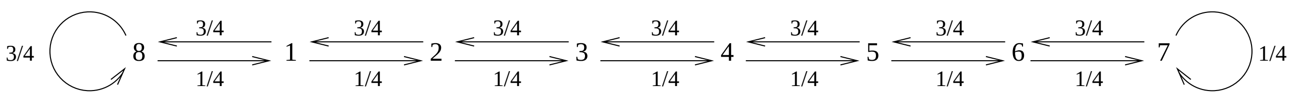
a.) Keressük meg a Markov lánc stacionárius eloszlását. Ehhez használjuk ki, hogy X_n születési-halálozási folyamat.

b.) Kezdetben a sor üres. Körülbelül mekkora a valószínűsége, hogy 1000 lépés után ismét üres?

c.) Mennyi lesz hosszú távon az átlagos sorhossz?

d.) **Bónusz kérdés:** Mi a válasz a fenti kérdésekre, ha a sorhosszra nincs felső korlát, vagyis az állapottér $\{0, 1, 2, \dots\}$?

Megoldás: A folyamat gráf-reprezentációja a 2 ábrán látható. Ez valóban születési-



2. ábra. Születési-halálozási folyamat gráf-reprezentációja

halálozási folyamat, mert ugrani 1 lépésben csak szomszédos állapotba lehet.

a.) Születési-halálozási folyamatban a szomszédos állapotok stacionárius eloszlás szerinti súlya úgy aránylik egymáshoz, mint a közöttük való két átmenethez tartozó átmenetvalószínűségek hányadosa – egészen pontosan olyan sorrendben, hogy

$$\frac{\pi_k}{\pi_{k+1}} = \frac{P_{k+1,k}}{P_{k,k+1}}.$$

Ez alapján a példabeli folyamatra

$$\frac{\pi_0}{\pi_1} = \frac{3}{1}, \frac{\pi_1}{\pi_2} = \frac{3}{1}, \frac{\pi_2}{\pi_3} = \frac{3}{1}, \frac{\pi_3}{\pi_4} = \frac{3}{1}, \frac{\pi_4}{\pi_5} = \frac{3}{1}, \frac{\pi_5}{\pi_6} = \frac{3}{1}, \frac{\pi_6}{\pi_7} = \frac{3}{1}.$$

Vagyis a stacionárius eloszlás konstansszorosa a

$$\tilde{\pi} = (3^7, 3^6, 3^5, 3^4, 3^3, 3^2, 3, 1)$$

vektornak. Ahhoz, hogy az elemek összege 1 legyen, a normálási konstanst

$$c = \frac{1}{1 + 3 + 3^2 + \cdots + 3^7} = \frac{1}{\frac{3^8-1}{3-1}} = \frac{1}{3280}$$

-nak kell választani, vagyis $\pi_k = \frac{3^{7-k}}{3280}$ $(k = 0, 1, \ldots, 7)$, avagy

$$\pi = \left(\frac{3^7}{3280}, \frac{3^6}{3280}, \frac{3^5}{3280}, \frac{3^4}{3280}, \frac{3^3}{3280}, \frac{3^2}{3280}, \frac{3}{3280}, \frac{1}{3280} \right).$$

Vegyük észre, hogy ehhez örvendetes módon fel se kellett írni a 8×8-as átmenetmátrixot.

b.) A Markov lánc irreducibilis, mert minden állapotból minden állapotba el lehet jutni. A 0 állapot nyilvánvalóan aperiodikus, mert 1 lépésben vissza lehet térni. Így az összes többi állapot – és az egész Markov lánc – is aperiodikus. Irreducibilis, aperiodikus és véges állapotterű Markov láncban a Markov láncok alaptétele szerint az eloszlás hosszú idő után közel van az egyetlen stacionárius eloszláshoz. 1000 lépés hosszú idő, így a kiinduló állapottól függetlenül $\mathbb{P}(X_{1000} = 0) \approx \pi_0 = \frac{3^7}{3280} = \frac{2187}{3280} \approx 0.66677$.

c.) Vezessük be az állapottéren az $f : S \to \mathbb{R}$ függvényt az $f(k) := k$ definícióval. Ez az f a sorhosszt méri, és oszlopvektorként tekintünk rá:

$$f = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

Mivel a Markov lánc irreducibilis és véges állapotterű, az ergodtétel szerint $f(X_n)$ időátlaga 1 valószínűséggel tart f-nek π szerinti várható értékéhez (súlyozott átlagához), vagyis

$$\begin{aligned} \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f(X_n) &= \sum_{k \in S} \pi_k f(k) = \pi f = \pi_0 \cdot 0 + \pi_1 \cdot 1 + \cdots + \pi_7 \cdot 7 = \\ &= \sum_{k=0}^{7} \frac{3^{7-k}}{3280} \cdot k = \frac{1636}{3280} \approx 0.4988. \end{aligned}$$

d.) **Bónusz:** A születési-halálozási folyamatra végtelen állapottér esetén is igaz, hogy $\frac{\pi_k}{\pi_{k+1}} = \frac{P_{k+1,k}}{P_{k,k+1}}$, vagyis esetünkben

$$\frac{\pi_0}{\pi_1} = \frac{\pi_1}{\pi_2} = \frac{\pi_2}{\pi_3} = \cdots = \frac{3}{1}, \tag{1}$$

már ha létezik stacionárius eloszlás. Az pedig pontosan akkor létezik, ha az (1) alapján definiált $\tilde{\pi}$ normálható. Más szóval, a stacionárius eloszlás most is konstansszorosa a

$$\tilde{\pi} = \left(1, \frac{1}{3}, \frac{1}{3^2}, \frac{1}{3^3}, \ldots\right)$$

vektornak, már ha van olyan konstans, amivel ezt megszorozva az elemek összege 1 lesz – vagyis ha az elemek összege véges. Esetünkben szerencsére

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \cdots = \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{3}{2} < \infty,$$

így

$$\pi = \frac{1}{\frac{3}{2}}\tilde{\pi} = \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3^2}, \frac{2}{3^3}, \frac{2}{3^4}, \dots\right)$$

lesz az egyetlen stacionárius eloszlás. Más szóval

$$\pi_k = \frac{2}{3^{k+1}} \quad (k = 0, 1, 2, 3, \dots).$$

A Markov láncok alaptételében állított eloszlás-konvergencia továbbra is érvényes, HA a végtelen állapotterű születési-halálozási folyamat irreducibilis és aperiodikus és HA van stacionárius elszlása. Esetünkben ezek teljesülnek, így

$$\mathbb{P}(X_{1000} = 0) \approx \pi_0 = \frac{2}{3}.$$

Hasonlóan, az ergodtételben állított konvergencia továbbra is érvényes, HA a végtelen állapotterű születési-halálozási folyamat irreducibilis és HA van stacionárius elszlása és HA az f-nek létezik a π szerinti várható értéke. Esetünkben ezek teljesülnek, így az $f : S \to \mathbb{R}$, $f(k) := k$ függvényre

$$\begin{aligned}\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} f(X_n) &= \sum_{k\in S} \pi_k f(k) = \pi f = \pi_0 \cdot 0 + \pi_1 \cdot 1 + \cdots = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \pi_k \cdot k = \sum_{k=0}^{\infty} k \frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^k = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Az utolsó végtelen sort sokféleképpen ki lehet számolni, pl. úgy is, hogy észrevesszük, hogy a π eloszlás szerint a sorhossz pesszimista geometriai eloszlású $p = \frac{2}{3}$ paraméterrel, aminek a várható értéke $\sum_{k=0}^{\infty} \pi_k k = \frac{1}{p} - 1 = \frac{1}{2}$.
Látható, hogy a végtelen állapottéren számolt határértékeket elég jól közelítik a véges (mindössze 8 elemű) állapottéren számoltak. Ennek az az oka, hogy a stacionárius eloszlás a mi modellünkben gyorsan lecseng, és a $k > 7$ állapotoknak együttesen is kicsi (egész pontosan $\frac{1}{3^8} \approx 0.00015$) a súlya.