VillamosMSc „Sztochasztika 2" ZH megoldókulcs 2014.11.24 $\boxed{\text{A csoport}}$

1/3 Mogy

(1) Leggyen $X_i = \begin{cases} 1, & \text{ha az } i\text{-edik érmedobás fej} \\ 0, & \text{ha nem.} \end{cases}$

Így $Y_i \sim B(p=\frac{1}{2})$, az Y_i-k függetlenek egymástól és N-től is. Tehát $X := \sum_{i=1}^{N} Y_i$ tényleg véletlen tagszámú összeg.

Továbbá $N \sim PesszGeom(r)$ ahol $r = \frac{1}{6}$

(ez az N a pesszimista geometriai eloszlás iskolapéldája).

Így $\mathbb{E}Y_i = p = \frac{1}{2}$, $\mathbb{E}N = \frac{1}{r} - 1 = 5$.

A véletlen tagszámú összeg várható értékéről pedig tudjuk, hogy $\boxed{\mathbb{E}X = \mathbb{E}N \cdot \mathbb{E}Y_i = \frac{1}{2} \cdot 5 = \frac{5}{2}}$

$\boxed{\text{Bónusz}}$ N generátorfüggvénye $g_N(z) = \frac{r}{1-(1-r)z} = \frac{1/6}{1-\frac{5}{6}z} = \frac{1}{6-5z}$,

Y_i generátorfüggvénye $g_Y(z) = (1-p) + pz = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}z$, így a véletlen tagszámú összeg generátorfüggvénye

$$g_X(z) = g_N(g_Y(z)) = \frac{1}{6-5\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}z\right)} = \frac{1}{\frac{7}{2} - \frac{5}{2}z} = \frac{2/7}{1-\frac{5}{7}z},$$ amiből

látszik, hogy X pesszimista geometriai eloszlású $\frac{2}{7}$ paraméterrel: $\boxed{X \sim PesszGeom\left(\frac{2}{7}\right)}$

(2) A Berry-Esseen tétel szerint a CHT becslés hibája

$$|\text{hiba}| \leq \frac{C\,\delta}{\sqrt{n}\,\sigma^3}, \text{ ahol } \quad C = 0.4784$$

$$n = 1\,000\,000$$

$$\sigma = \sqrt{\mathrm{Var}\, X_i} = \sqrt{\mathbb{E}\left((X_i - \mathbb{E}X_i)^2\right)}$$

$$\delta = \mathbb{E}\left(|X_i - \mathbb{E}X_i|^3\right)$$

σ és δ kiszámolásához: $\mathbb{P}(X_i = -1) = \mathbb{P}(X_i = 1) = \frac{1}{2}$, így

$$\mathbb{E}X_i = \frac{1}{2}\cdot(-1) + \frac{1}{2}\cdot 1 = 0,$$

$$\sigma^2 = \mathbb{E}\left((X_i - \mathbb{E}X_i)^2\right) = \mathbb{E}\left((X_i - 0)^2\right) = \mathbb{E}X_i^2 = \frac{1}{2}\cdot(-1)^2 + \frac{1}{2}\cdot 1^2 = 1$$

$$\Rightarrow \boxed{\sigma = 1}$$

$$\delta = \mathbb{E}\left(|X_i - \mathbb{E}X_i|^3\right) = \mathbb{E}\left(|X_i - 0|^3\right) = \mathbb{E}\left(|X_i^3|\right) = \frac{1}{2}\cdot|-1|^3 + \frac{1}{2}\cdot|1|^3 = 1$$

(Az abszolút érték nagyon fontos!)

Egybeírva:

$$\left|\text{CHT becslés hibája}\right| \leq \frac{0.4784\cdot 1}{\sqrt{1000000}\cdot 1^3} = \frac{0.4784}{1000} = \underline{\underline{0.0004784}}$$

Villamos MSc „Sztochasztika 2" ZH megoldókulcs 2014. 11. 24 $\boxed{\text{A csoport}}$

3/3 Nagy

(3) A két tanult nagy eltérés tétel közül csak a Hoeffding-egyenlőtlenség alkalmazható, mert az egyes emberek által felvett összegek eloszlását nem ismerjük pontosan, és az se biztos, hogy azonos eloszlásúak. (Ezért a Cramér tételt nem tudjuk használni.) Viszont az összegek korlátosak és a várható értékük ismert:

Legyen $n = 500$

X_i az i-edik ember által felvett összeg $\boxed{\text{eFt-ban}}$

$S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ a teljes felvett összeg.

Tudjuk, hogy $a_i \le X_i \le b_i$, ahol $a_i = 1$, $b_i = 100$

és $EX_i = 20 \Rightarrow \mathbb{E}S_n = n \cdot 20 = 10000$.

Vagyis a Hoeffding egyenlőtlenség szerint

$$P(S_n \ge \mathbb{E}S_n + t) \le \exp\left\{-\frac{2t^2}{\sum_{i=1}^{n}(b_i - a_i)^2}\right\} = \exp\left\{-\frac{2t^2}{500(100-1)^2}\right\},$$

ezért legyen $K = \mathbb{E}S_n + t = 10000 + t$,

ahol t olyan, hogy $\exp\left\{-\frac{2t^2}{500 \cdot 99^2}\right\} = 0.01 = 10^{-2}$

Ezt megoldva $+\frac{\cancel{2}t^2}{500 \cdot 99^2} = +\cancel{2}\ln 10 \Rightarrow t = \sqrt{500\ln 10} \cdot 99 =$

$= \sqrt{5\ln 10} \cdot 990 \approx 3359.1$

Vagyis $K = ES_n + t = 13359.1$, azaz ha az automatába

$13360\,\text{eFt} = \boxed{13\,360\,000\ \text{Ft}}$-ot tesznek, akkor

$\mathbb{P}(\text{nem fogy ki}) \ge 99\%$.