A csoport Mogy

① a.) A rásztedett N száma pesszimista geom. eloszlású $p = \frac{1}{10}$ paraméterrel,
vagyis $p_k := \mathbb{P}(\overset{N=k}{k \text{ rásztedett}}) = \left(\frac{9}{10}\right)^k \cdot \frac{1}{10}$ $(k = 0, 1, 2, \dots)$

b.) Legyen X_i az i-edik rásztedett kára, így a teljes kár

$S = \sum_{i=1}^{N} X_i$ Ennek várható értéke a TVET szerint millió Ft-ben

$$\mathbb{E}S = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(N=k)\,\mathbb{E}(S \mid N=k) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k\, k\, \mathbb{E}X_1 = \mathbb{E}X_1 \sum_{k=0}^{\infty} k p_k = \mathbb{E}X_1 \cdot \mathbb{E}N =$$

$$= 1 \cdot \left(\frac{1}{p} - 1\right) = 9$$

② $N :=$ a megjelentek száma, $N \sim Bin(n = 300, p = \frac{2}{3})$. $q = \frac{1}{3}$

$\xi_i :=$ az i-edik hallgató pontszáma $\xi_i \sim Uni\{0,1,2,3,4,5\}$

$X = \sum_{i=1}^{N} \xi_i$ véletlen tagszámú összeg.

Generátor fv-ek, momentumok: $g_\xi(z) = \frac{1+z+z^2+z^3+z^4+z^5}{6}$, $\mathbb{E}\xi_i = \frac{5}{2}$, $Var\,\xi_i$

$$Var\,\xi_i = \frac{\left(\frac{5}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{5}{2}\right)^2}{6} = \frac{\cancel{2}}{} \frac{1+9+25}{6 \cdot 2 \cdot \cancel{2}} = \frac{35}{12}$$

$g_N(z) = (q + pz)^n$, $\mathbb{E}N = pn = 200$, $Var\,N = npq = \frac{200}{3}$.

a.) $$g_X(z) = g_N(g_\xi(z)) = \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1+z+z^2+z^3+z^4+z^5}{6}\right)^{300}$$

b.) $\mathbb{E}X = \mathbb{E}N\,\mathbb{E}\xi = 200 \cdot \frac{5}{2} = \underline{500}$

c.) $$Var\,X = \mathbb{E}N\,Var\,\xi + Var\,N\,(\mathbb{E}\xi)^2 = 200 \cdot \frac{35}{12} + \frac{200}{3} \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{\overbrace{35+25}^{60}}{12} \cdot 200 = \underline{1000}$$

③ $g(z) = \frac{1}{6-5z}$ $\quad g'(z) = \frac{+5}{(6-5z)^2}$, $\quad g''(z) = \frac{2 \cdot 25}{(6-5z)^3}$

a.) $\boxed{\mathbb{E}X = g'(1) = 5}$

b.) $\mathbb{E}(X^2 - X) = g''(1) = 50 \Rightarrow \mathbb{E}X^2 = 50 + 5 = 55$, $Var\,X = \mathbb{E}X^2 - (\mathbb{E}X)^2 = 55 - 25 = 30 \Rightarrow \boxed{DX = \sqrt{30}}$

c.) $\boxed{\mathbb{P}(X=0) = g(0) = \frac{1}{6}}$ $\quad$ (Megj.: $X \sim$ Pessz. Geom. $(p = \frac{1}{6})$.)

d.) $\mathbb{P}(X=1) = g'(0) = \frac{5}{36}$.

Vill. MSc Mat Sztoch.2 ZH 2013.11.25 B csoport = 1/2 - Mogy

(1) X := amit Maricka dobott Y := amit Pistike dobott

$$\cancel{P(Y>X) \overset{TVT}{=} \sum_{k=1}^{6} P(X=k)P(Y>X \mid X=k) = \sum_{k=1}^{6}\frac{1}{6}P(Y>k) = \frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}+\frac{4}{6}+\frac{3}{6}+\frac{2}{6}+\frac{1}{6}+\frac{0}{6}\right) = \frac{15}{36}}$$

$$P(X<Y) \overset{TVT}{=} \sum_{k=1}^{6} P(Y=k)P(X<Y \mid Y=k) = \sum_{k=1}^{6}\frac{1}{6}P(X<k) = \frac{1}{6}\left(\frac{0}{6}+\frac{1}{6}+\frac{2}{6}+\frac{3}{6}+\frac{4}{6}+\frac{5}{6}\right) = \frac{15}{36}$$

a.) $$P(Y=6 \mid X<Y) \overset{Bayes}{=} \frac{P(Y=6)P(X<Y \mid Y=6)}{\sum_{k=1}^{6} P(Y=k)P(X<Y \mid Y=k)} = \frac{\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}}{\frac{15}{36}} = \frac{1}{3}$$

b.) $$E(Y \mid X<Y) = \sum_{k=1}^{6} k\,P(Y=k \mid X<Y) \overset{\text{mint az előző}}{=} \sum_{k=1}^{6} k\,\frac{\frac{1}{6}\cdot\frac{k-1}{6}}{\frac{15}{36}} = \frac{1\cdot0+2\cdot1+3\cdot2+4\cdot3+5\cdot4+6\cdot5}{15} =$$

$$= \frac{0+2+6+12+20+30}{15} = \frac{70}{15} = \frac{14}{3}$$

X \ Y	1	2	3	4	5	6
1	11	12	13	14	15	16
2	21	22	23	24	25	26
3	31	32	33	34	35	36
4	41	42	43	44	45	46
5	51	52	53	54	55	56
6	61	62	63	64	65	66

Avagy: Y feltételes eloszlása X<Y feltétel mellett

k	2	3	4	5	6
p_k	$\frac{1}{15}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{3}{15}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{5}{15}$

$\Rightarrow P(Y=6 \mid X<Y) = \frac{5}{15}$; $E(Y \mid X<Y) = \frac{1}{15}\cdot2+\frac{2}{15}\cdot3+\frac{3}{15}\cdot4+\frac{4}{15}\cdot5+\frac{5}{15}\cdot6 = \frac{70}{15}$

(2) X := a 10:00:00 és 10:02:00 között érkező hívások száma

Y := a 10:02:00 és 10:03:00 //

Z := a 10:00:00 és 10:03:00 // külső hívások száma.

a.) $X \sim Poi(6) \Rightarrow P(X=0) = e^{-6} \approx 0.0025$

b.) $Y \sim Poi(3)$, X-től független $\Rightarrow P(X=0, Y\geq3) = P(X=0)\left[1-(P(Y=0)+P(Y=1)+P(Y=2))\right] =$

$$= e^{-6}\left[1-e^{-3}\left(1+3+\frac{3^2}{2}\right)\right] = e^{-6}-\frac{17}{2}e^{-9} \approx 0.0014$$

c.) $Z \sim Poi(3\cdot3\cdot\frac{1}{3}) = Poi(3) \Rightarrow P(Z=0) = e^{-3} \approx 0.050$

Vill MSc Mat Sztochz ZH 2013.11.25 B csoport — 2/2 — Mogy

(3) $Z_n :=$ a levél példányszáma az n-edik generációban.

Z_n elágazó folyamat az 1-lépéses utódszám-eloszlás:

k	0	10
p_k	$\frac{9}{10}$	$\frac{1}{10}$

$\Rightarrow m = \sum_k k p_k = 1$, a folyamat kritikus. Ezért

a.) $\mathbb{P}(\text{kihalás}) = 1$

b.) $\mathbb{E}\left(\sum_{n=0}^{\infty} Z_n\right) = \infty$